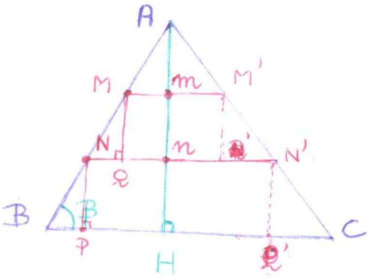
Corrigé du sujet n° 15



Les dimensions n'intervenant pas, le découpage de la hauteur [AH] maximisant l'aire des rectangles dans le triangle rectangle AHB maximisera aussi l'aire dans le triangle rectangle AHC, donc maximisera la somme dans ABC ...

1] Avec 2 rectangles.

Maximiser l'aire rectangulaire est équivalent à minimiser la somme des aires des triangles rectangles AmM, MQN et NPB, c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \operatorname{cotan} \beta \times Am^2 + \frac{1}{2} \operatorname{cotan} \beta \times MQ^2 + \frac{1}{2} \operatorname{cotan} \beta \times NP^2 = \frac{1}{2} \operatorname{cotan} \beta \left(Am^2 + mn^2 + nH^2 \right)$

Cela revient donc à déterminer le découpage de [AH] minimisant la somme $Am^2 + mn^2 + nH^2$, et il est à peu près évident que cela correspond à $Am = mn = nH$

((*): pour une position quelconque de m, la somme n'est pas minimale si n n'est pas le milieu de [mH] ; de même, pour une position quelconque de n, la somme n'est pas minimale si m n'est pas le milieu de [An]

ou (**) : si on remplace 3 longueurs égales à $\frac{l}{3}$ par $\frac{l}{3} + a$, $\frac{l}{3} + b$ et $\frac{l}{3} + c$, alors $\left(\frac{l}{3}+a\right)^2 + \left(\frac{l}{3}+b\right)^2 + \left(\frac{l}{3}+c\right)^2$
$= \frac{l^2}{3} + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2l}{3}(a+b+c) = \frac{l^2}{3} + a^2 + b^2 + c^2$ car
$\frac{l}{3} + a + \frac{l}{3} + b + \frac{l}{3} + c = l \Rightarrow a + b + c = 0$ et donc minimum égal à $\frac{l^2}{3}$ pour $a = b = c = 0$)

La somme des aires des 3 triangles est alors :
$\frac{1}{2} \operatorname{cotan} \beta \times \frac{AH^2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{BH}{AH} \times \frac{AH^2}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{BH \times AH}{2} \right)$
$= \frac{1}{3}$ aire du triangle AHB, et donc l'aire maximale des pièces rectangulaires est $\frac{2}{3}$ de l'aire de AHB

T.S.V.P. →

Idem dans le triangle rectangle AHC, donc l'aire maximale des pièces rectangulaires est toujours égale aux deux tiers de l'aire totale, indépendamment du côté auquel les bandes sont parallèles !

2] Généralisation à n bandes rectangulaires.

On obtient alors une subdivision de [AH] en $n+1$ segments de même longueur, et l'aire totale de ces bandes est alors $\frac{n}{n+1} \times \text{aire}(ABC)$

(on a bien $\frac{1}{2}$ pour 1 bande et $\frac{2}{3}$ pour 2 bandes ...)

On peut remarquer que : $\lim_n \frac{n}{n+1} \times \text{aire}(ABC) = \text{aire}(ABC)$

... et on retrouve la convergence des "sommes de Darboux" vers l'intégrale de Riemann, dans le cas particulier d'une fonction affine :

en considérant, par exemple, (BC) comme l'axe des abscisses d'origine B, [BA] apparaît comme la représentation graphique de $x \to \frac{AH}{BH} x$ pour $x \in [0 ; BH]$

$$\int_0^{BH} \frac{AH}{BH} x \, dx = \frac{1}{2} \frac{AH}{BH} \times BH^2 = \frac{1}{2} AH \times BH = \text{aire}(AHB)$$

$= \lim_n$ (aires rectangulaires pour une subdivision en points équidistants)