Problème de la Quinzaine

L'énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x)) = x^2 - 2x + 2$$

Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$

Une proposition de solution

Remarquons d'emblée que $f(0)$ ne peut être égale à 0 car sinon on aurait $f(f(0)) = f(0) = 0 = 0^2 - 2 \times 0 + 2 = 2$ ce qui est évidemment impossible.
Ainsi, soit $r \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(0) = r$
On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f(f(0)) & = & f(r) = 2 \\ f(f(r)) & = & f(2) = r^2 - 2r + 2 \quad \textbf{(1)} \\ f(f(2)) & = & f(r^2 - 2r + 2) = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 2 \\ f(f(r^2 - 2r + 2)) & = & f(2) = r^2 - 2r + 2 \quad d'après\textbf{(1)} \end{array}$$

Par suite, si $f(0) = r$ alors $r^2 - 2r + 2$ est point fixe de $f \circ f$.
Cherchons donc les points fixes de $f \circ f$:
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(x) = x$
On a alors $x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$
Par suite, $r^2 - 2r + 2 = 1$ ou $r^2 - 2r + 2 = 2$ soit $r = 1$ ou $r = 2$ puisque $r = 0$ est exclu.
Finalement, si $f(0) = r$ alors nécessairement $r = 1$ ou $r = 2$.
On vérifie que ces valeurs conviennent.
Conclusion : Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x^2 - 2x + 2$ alors $f(0) = 1$ ou $f(0) = 2$.