## Énoncé du problème

On observe que :

- $6^2 - 5^2 = 11$
- $56^2 - 45^2 = 1111$
- $556^2 - 445^2 = 111111$

Peut-on généraliser ?

## Solution

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, soient $u_n$ et $v_n$, les nombres entiers qui peuvent s'écrire avec $n$ chiffres dans le système décimal, de la manière suivante :

- $u_n = 1 + 5\sum_{p=0}^{n-1} 10^p = \underbrace{5\ldots\ldots5}_{n-1 \text{ chiffres } 5}\ 6$
- $v_n = 1 + 4\sum_{p=0}^{n-1} 10^p = \underbrace{4\ldots\ldots4}_{n-1 \text{ chiffres } 4}\ 5$

En se servant de la formule classique d'addition des termes d'une suite géométrique de raison $q$ : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} q^p = \frac{q^n - 1}{q-1}$ ;

les transformations successives de la soustraction $u_n^2 - v_n^2$ nous donnent :

$$u_n^2 - v_n^2 = (u_n - v_n)(u_n + v_n)$$

$$u_n^2 - v_n^2 = \left(\sum_{p=0}^{n-1} 10^p\right)\left(2 + 9\sum_{p=0}^{n-1} 10^p\right)$$

$$u_n^2 - v_n^2 = \frac{10^n - 1}{9} \times \left(2 + 9 \times \frac{10^n - 1}{9}\right)$$

$$u_n^2 - v_n^2 = \frac{1}{9}(10^n - 1)(10^n + 1)$$

$$u_n^2 - v_n^2 = \frac{10^{2n} - 1}{10 - 1}$$

$$u_n^2 - v_n^2 = \sum_{p=0}^{2n-1} 10^p$$

Cette dernière somme est l'écriture décimale d'un nombre entier ayant $2n$ chiffres tous égaux à un, on peut donc écrire cette égalité généralisée :

$$\boxed{\underbrace{5\ldots\ldots\ldots5}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 5}}6^2 \quad - \quad \underbrace{4\ldots\ldots\ldots4}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 4}}5^2 = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots1}_{\substack{2n \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 1}}}$$

Une même démonstration permettrait de créer une «invasion de 3, 5 ou 7» :

$$\boxed{\underbrace{6\ldots\ldots\ldots6}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 6}}7^2 \quad - \quad \underbrace{3\ldots\ldots\ldots3}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 3}}4^2 = \underbrace{3\ldots\ldots\ldots3}_{\substack{2n \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 3}}}$$

$$\boxed{\underbrace{7\ldots\ldots\ldots7}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 7}}8^2 \quad - \quad \underbrace{2\ldots\ldots\ldots2}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 2}}3^2 = \underbrace{5\ldots\ldots\ldots5}_{\substack{2n \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 5}}}$$

$$\boxed{\underbrace{8\ldots\ldots\ldots8}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 8}}9^2 \quad - \quad \underbrace{1\ldots\ldots\ldots1}_{\substack{n-1 \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 1}}2^2 = \underbrace{7\ldots\ldots\ldots7}_{\substack{2n \text{ chiffres tous} \\ \text{égaux à } 7}}}$$