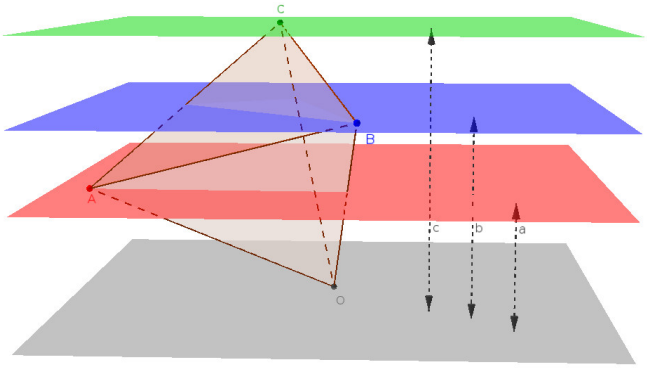
## Énoncé du problème

Étant donné 4 plans parallèles, montrez qu'il existe au moins un tétraèdre régulier admettant un sommet dans chaque plan. Quel est la longueur de son arête en fonction des nombre a , b et c mesurant les distances entre les plans selon la figure de droite.




## Solution

Pour aborder cet exercice en terminale S, il faut redémontrer la formule ci-dessous qui a disparu des programmes depuis 2012. La distance entre l'origine et un plan admettant pour équation $mx+ny+pz=q$ dans un repère orthonormé de l'espace est

$$\frac{|q|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Les coefficients $m$, $n$ et $p$ qui permettent d'exprimer l'équation d'un tel plan sont définis à un coefficient multiplicateur près ; si on suppose que $m^2+n^2+p^2=1$ ; $(m;n;p)$ sont les coordonnées d'un vecteur normé et normal au plan, dont la distance à l'origine est $|q|$

Nous allons d'abord construire un tétaèdre régulier OMNP ; où les coordonnées de M, N et P s'exprimeront de la manière la plus simple possible dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Puis nous chercherons à déterminer $m$ ; $n$ et $p$ tels que $m^2+n^2+p^2=1$, de manière à obtenir les équations suivantes de 3 plans $\mathscr{P}_{\mathrm{M}}$, $\mathscr{P}_{\mathrm{P}}$ et $\mathscr{P}_{\mathrm{P}}$ parallèles entre eux , passant respectivement par les sommets M , N et P.

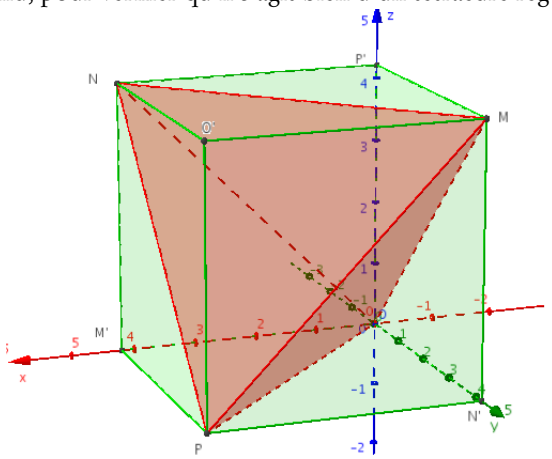
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & ny & + & pz & = & a \\ mx & + & ny & + & pz & = & b \\ mx & + & ny & + & pz & = & c \end{array}\right. \quad , \quad \text{pour mettre en évidence 3 plans tels que :} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\left(\mathrm{O},\mathscr{P}_{\mathrm{M}}\right) & = & a \\ \mathrm{d}\left(\mathrm{O},\mathscr{P}_{\mathrm{N}}\right) & = & b \\ \mathrm{d}\left(\mathrm{O},\mathscr{P}_{\mathrm{P}}\right) & = & c \end{array}\right.$$

Pour construire dans un espace muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, tous les tétraèdres OABC tels que $z_{\mathrm{A}}=a$, $z_{\mathrm{B}}=b$ et $z_{\mathrm{C}}=c$, nous procédérons par transformations isométriques du tétraèdre OMNP et des 3 plans $\mathscr{P}_{\mathrm{M}}$, $\mathscr{P}_{\mathrm{P}}$ et $\mathscr{P}_{\mathrm{P}}$. Nous pourrons même donner de manière explicite en fonction de $a$, $b$ et $c$ les coordonnées d'un exemple de 3 sommets A, B et C. Un logiciel de calcul formel comme celui intégré à geogebra est le bienvenu, pour vérifier qu'il s'agit bien d'un tétraèdre régulier. [1]

Choisissons parmi les sommets d'un cube d'arête $d>0$, les points suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}(0;d;d) \\ \mathrm{N}(d;0;d) \\ \mathrm{P}(d;d;0) \end{array}\right.$$

pour faire apparaître le tétraèdre régulier OMNP, dont les 6 arêtes ont pour mesure $d\sqrt{2}$.




1. La version 4.4 de geogebra actuellement en version β, et qui sortira en version définitive le 1er décembre intègre GIAC qui, n'est autre que le moteur de calcul de XCAS, ce qui fournira une interface beaucoup plus conviviale pour cet excellent logiciel de calcul formel. https://www.geogebra.org/forum/viewtopic.php?f=70&t=32337

Les équations de plan sont vérifiées par les sommets du tétraèdre, si et seulement si :

$$\begin{cases} n + p = \dfrac{a}{d} \\ m + p = \dfrac{b}{d} \\ m + n = \dfrac{c}{d} \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que la résolution de ce système aboutit à :

$$\begin{cases} m = \dfrac{-a+b+c}{2d} \\ n = \dfrac{a-b+c}{2d} \\ p = \dfrac{a+b-c}{2d} \end{cases}$$

Pour obtenir $m^2+n^2+p^2 = \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)}{4d^2} = 1$, il faut que $2d = \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)}$,

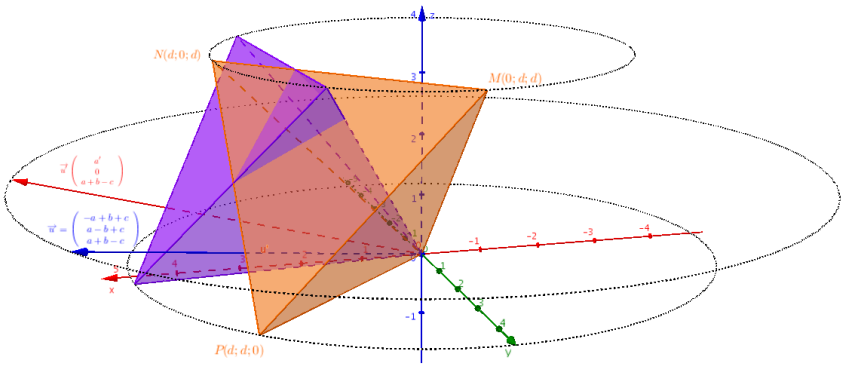
l'arête du tétraèdre a donc nécessairement pour mesure : $\boxed{d\sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)-(ab+ac+bc)}}$

Remarquons qu'une fois prouvé la possibilité et l'unicité des dimensions d'un telle construction, si on admet que le carré de l'arête du tétraèdre est une expression polynomiale de dégré 2 en $a$ , $b$ et $c$, il devient facile de déterminer son expression. Cette expression doit être symétrique en $a$, $b$ et $c$, elle est donc de la forme $r(a^2+b^2+c^2)+s(ab+ac+bc)$, où $r$ et $s$ sont des constantes que nous pouvons déterminer en considérant les cas suivants :

- si $a=b=0$, on est dans le cas limite où les points O, M et N sont dans un même plan et la hauteur du tétraèdre est $c$ qui est la distance entre le sommet P et le plan de base (OMN), Le carré de l'arête de ce tétraèdre est donc $\dfrac{3}{2}c^2$, d'où $r=\dfrac{3}{2}$.
- Lorsque $a=b=c$, on est dans une situation analogue où les points M , N et P sont dans un même plan et la hauteur du tétraèdre est $c=a=b$. On obtient un carré de l'arête égal à $\dfrac{9}{2}c^2+3sc^2$, d'où : $\dfrac{9}{2}+3s=\dfrac{3}{2}$, finalement : $s=-1$.

Si le problème posé est l'obtention d' un tétraèdre régulier OABC tel que $z_A=a$, $z_B=b$ et $z_C=c$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, il faut procéder par transformation isométrique du tétraèdre OMNP précédent de manière que le vecteur $\vec{u}=(-a+b+c)\vec{\imath}+(a-b+c)\vec{\jmath}+(a+b-c)\vec{k}$ soit tansformé en : $2d\,\vec{k}$ . Pour exprimer simplement une telle rotation rotation, qui amène le vecteur $\vec{u}$ sur l'axe [Oz), nous procéderons comme illustré dans les figures ci-dessous en 2 temps :

- par une rotation $r_1$ d' axe [Oz) transformant le vecteur $\vec{u}$ en le vecteur $\vec{u'}=\overrightarrow{OU'}$ tel que $U' \in (xOz)$,



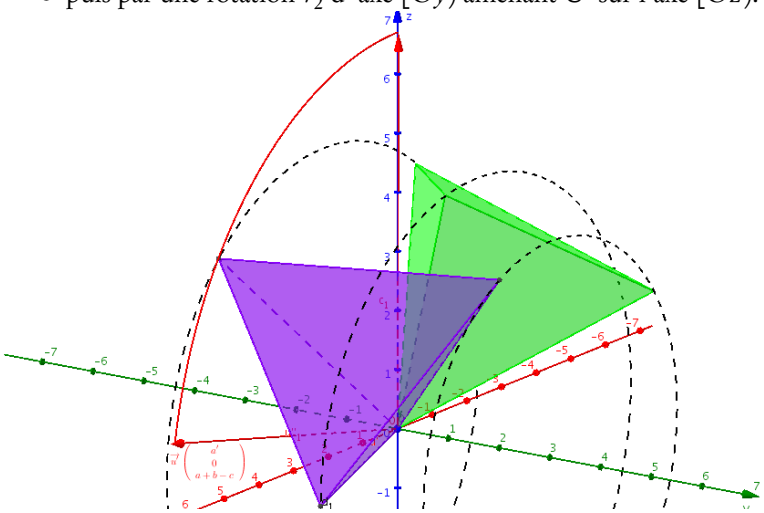

la matrice de cette rotation dans la base

$$\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right) \text{ est } \mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{-a+b+c}{d'} \\ \sin\beta = \dfrac{a-b+c}{d'} \end{cases} ;$$

avec $d' = \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)-4ab}$.

- puis par une rotation $r_2$ d' axe [Oy) amenant U′ sur l'axe [Oz).



la matrice de cette rotation dans la base

$$\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right) \text{ est } \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a+b-c}{2d} \\ \sin\alpha = \dfrac{d'}{2d} \end{cases} .$$

Rappelons que

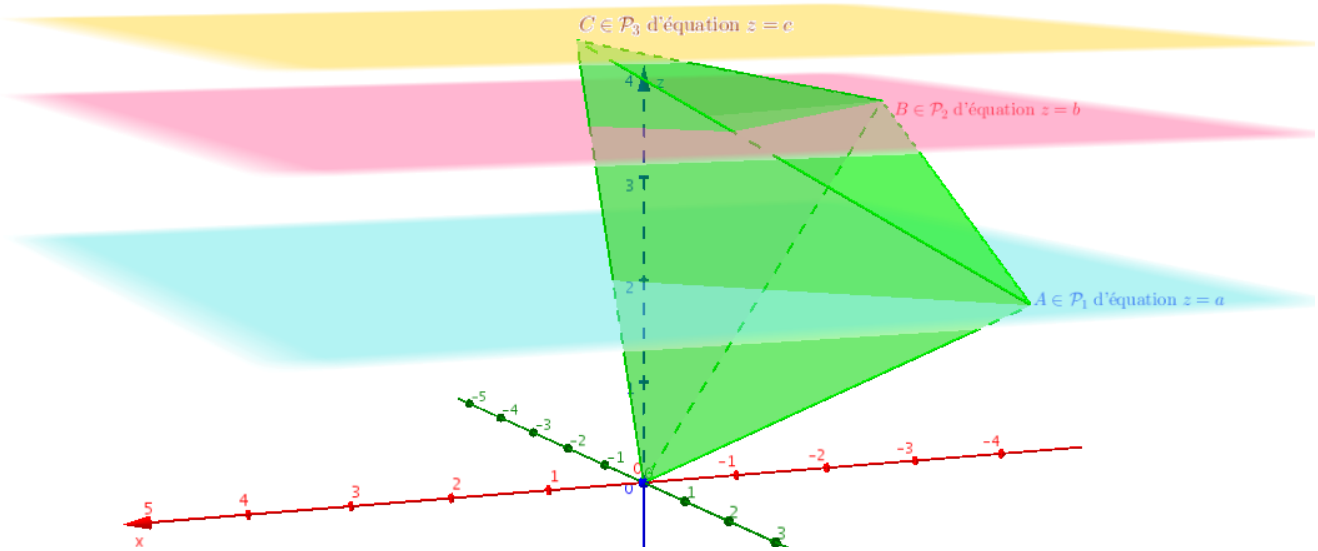
$2d = \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)}$.

Ces deux rotations donnent la figure ci-dessous où les points $A = r_2 \circ r_1(M)$, $B = r_2 \circ r_1(N)$ et $C = r_2 \circ r_1(P)$ ont pour coordonnées :

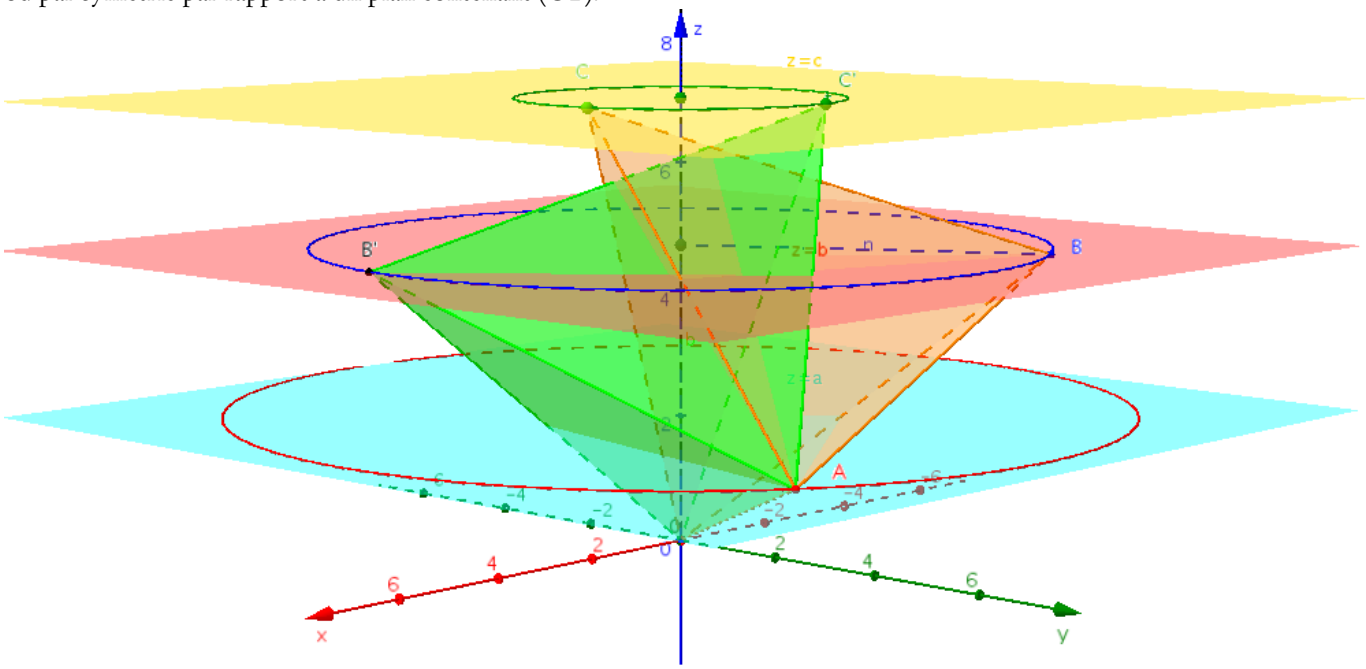
$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2d'}(a+b-c)(a-b+c) - \frac{d'}{2} \\ (-a+b+c)\frac{d}{d'} \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2d'}(-a+b+c)(a+b-c) - \frac{d'}{2} \\ (-a+b-c)\frac{d}{d'} \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{d'}(a+b-c) \\ (-a+b)\frac{2d}{d'} \\ c \end{pmatrix}$$




Pour obtenir tous les tétraèdres possibles en ayant fixé un sommet en 0, il suffit de procéder par rotation autour de l'axe $[Oz)$ ou par symétrie par rapport à un plan contenant $(Oz)$.




Ces figures ont été créées à l'aide geogebra 3D ce qui permet de vérifier ces calculs. Geogebra 3D est actuellement en version $\beta$, mais mathématiquement très au point. Une option d'affichage à observer avec des lunettes à filtres rouge et bleu donne des résultats spectaculaires. Seules quelques options d'exportation et le réglage des unités sur les axes ne sont pas encore implémentées. On peut le télécharger à l'adresse suivante : http://download.geogebra.org/installers/5.0/.