Énoncé du problème

Je suis un nombre à trois chiffres ; mon quotient par 11 est égal à la somme des carrés de mes trois chiffres. Qui suis-je ? Je n'ai nullement la prétention d'être unique !

Solution

Écrivons notre nombre entier à 3 chiffres sous la forme $n = 100c + 10d + u$; où $\{c; d; u\} \subset \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. On a la congruence : $n \equiv c - d + u$ modulo 11, le reste de la division euclidienne de n par 11 est donc $c - d + u + 11k$ avec $k \in \{-1; 0; 1\}$. On voudrait que le quotient euclidien de n par 11 soit $c^2 + d^2 + u^2$, on a donc les égalités équivalentes suvantes :

$$
\begin{gathered}
100c + 10d + u = 11(c^2 + d^2 + u^2) + c - d + u + 11k \\
0 = 11c^2 - 99c + 11d^2 - 11d + 11u^2 + 11k \\
0 = c^2 - 9c + d^2 - d + u^2 + k \\
(c - 4,5)^2 + (d - 0,5)^2 = 4,5^2 + 0,5^2 - u^2 - k \\
\boxed{(2c - 9)^2 + (2d - 1)^2 = 82 - 4u^2 - 4k}
\end{gathered}
$$

On a donc une somme de deux carrés entiers impairs qui doit être égale à $82 - u^2 - 4k$; de telles sommes doivent donner les résultats inférieurs à 86 indiqués dans le tableau suivant :

$+$	1^2	3^2	5^2	7^2	9^2
1^2	2	10	26	50	82
3^2	10	18	34	58	
5^2	26	34	50	74	
7^2	50	58	74		
9^2	82				

Étudions alors 3 cas selon la valeur de k,

- 1ercas : k=0. Nous avons $0 \leqslant c - d + u \leqslant 10$ qui est alors le reste de la division euclidienne de n par 11. On doit avoir : $(2c - 9)^2 + (2d - 1)^2 = 82 - 4u^2$. Il faut pour cela $u \in \{0; 4\}$ pour obtenir une somme de deux carrés figurant dans le tableau ci-dessus.

  $*$ si $u = 0$: $(2c - 9)^2 + (2d - 1)^2 = 82$ avec $\left\{\begin{array}{l} 2c - 9 = \pm 9 \\ 2d - 1 = \pm 1 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} c \in \{0; 9\} \\ d \in \{0; 1\} \end{array}\right.$

  ou bien avec $\left\{\begin{array}{l} 2c - 9 = \pm 1 \\ 2d - 1 = \pm 9 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} c \in \{4; 5\} \\ d = 5 \end{array}\right.$

  $*$ si $u = 4$: $(2c - 9)^2 + (2d - 1)^2 = 18$ avec $\left\{\begin{array}{l} 2c - 9 = \pm 3 \\ 2d - 1 = \pm 3 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} c \in \{3; 6\} \\ d = 2 \end{array}\right.$

  Seuls les nombres : 000 ; 900 ; 910 ; 550 ; 324 et 624 ainsi obtenus vérifient $0 \leqslant c - d + u < 11$. Les conditions demandées sont trivialement vérifiées par 000, pour les autres nombres on peut vérifier les égalités suivantes :

  $\star$ $910 = 11(9^2 + 1^2) + 8$
  $\star$ $900 = 11 \times 9^2 + 9$
  $\star$ $624 = 11(6^2 + 2^2 + 4^2) + 8$
  $\star$ $550 = 11(5^2 + 5^2) + 0$
  $\star$ $324 = 11(3^2 + 2^2 + 4^2) + 5$

- 2ecas : k=-1. On a $c - d + u \geqslant 11$, et le reste de la division de n par 11 est $c - d + u - 11$. On doit avoir :$(2c - 9)^2 + (2d - 1)^2 = 86 - 4u^2$. Il faut $u \in \{1; 3\}$ pour obtenir une somme de deux carrés convenable.

  $*$ si $u = 1$: $(2c - 9)^2 + (2d - 1)^2 = 82$. On est amené à considérer les nombres avec les mêmes chiffres c et d que dans le cas $k = u = 0$. Mais aucun des 4 nombres 001 , 011 , 901 ou 911 ne vérifie $c - d + u \geqslant 11$

  $*$ si $u = 3$: $(2c - 9)^2 + (2d - 1)^2 = 50$ avec $\left\{\begin{array}{l} 2c - 9 = \pm 7 \\ 2d - 1 = \pm 1 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} c \in \{1; 8\} \\ d \in \{0; 1\} \end{array}\right.$

  ou bien avec $\left\{\begin{array}{l} 2c - 9 = \pm 1 \\ 2d - 1 = \pm 7 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} c \in \{4; 5\} \\ d = 4 \end{array}\right.$

  ou bien avec $\left\{\begin{array}{l} 2c - 9 = \pm 5 \\ 2d - 1 = \pm 5 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l} c \in \{2; 7\} \\ d = 3 \end{array}\right.$

  Parmi Les nombres que l'on peut former avec ces chiffres, seul 803 vérifie la condition $c - d + u \geqslant 11$, et on a bien :

  $$\boxed{803 = 11(8^2 + 3^2)}$$

- 3^{e}cas : k=1 On a $c-d+u<0$, et le reste de la division de n par 11 est $c-d+u+11$. On doit avoir : $(2c-9)^2+(2d-1)^2=78-4u^2$; il faut $u=1$ pour obtenir une somme de deux carrés convenable.

Dans ce cas : $(2c-9)^2+(2d-1)^2=74$ avec $\left\{\begin{array}{rcrl} 2c & - & 9 & =\pm 7 \\ 2d & - & 1 & =\pm 5 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{ccc} c & \in & \{1;8\} \\ d & = & 3 \end{array}\right.$

ou bien avec $\left\{\begin{array}{rcrl} 2c & - & 9 & =\pm 5 \\ 2d & - & 1 & =\pm 7 \end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{ccc} c & \in & \{2;7\} \\ d & = & 4 \end{array}\right.$

Parmi Les nombres que l'on peut former avec ces chiffres, seuls 131 et 241 vérifient la condition $c-d+u<0$, et on a bien :

$$\boxed{\begin{array}{l} \star\ 131=11(1^2+3^2+1^2)+10 \\ \star\ 241=11(2^2+4^2+1^2)+10 \end{array}}$$

Avant d'établir cette méthode pour trouver parmi 1000 nombres ceux qui avaient la propriété recherchée, il est évident que ma calculatrice les avait trouvés encore plus rapidement que moi à l'aide de ce petit algorithme saisi dans la figure ci-dessous à gauche, avec les résultats affichés à droite .