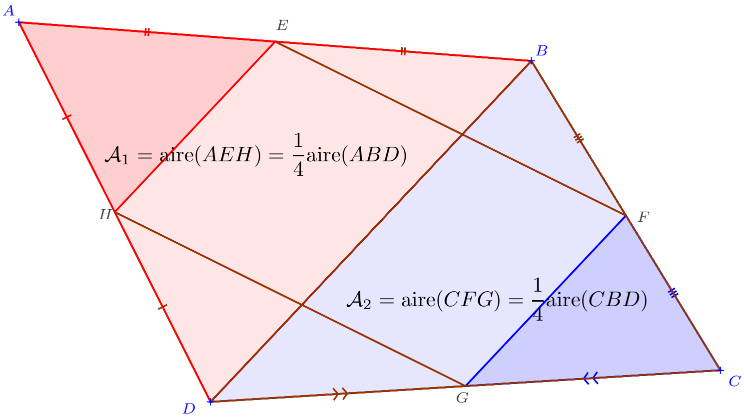
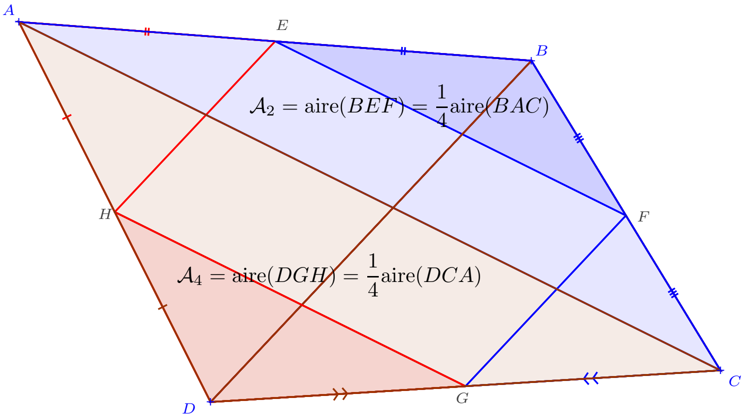
1 Énoncé du problème

On considère un quadrilatère convexe ABCD. Soient E, F, G, H les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA]. Posons $A_1 = \mathscr{A}(AEH)$, $A_2 = \mathscr{A}(BEF)$, $A_3 = \mathscr{A}(CFG)$, $A_4 = \mathscr{A}(DGH)$ et $A = \mathscr{A}(ABCD)$. Montrer que :

$$\sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A_2} + \sqrt[3]{A_3} + \sqrt[3]{A_4} \quad \leqslant \quad 2\sqrt[3]{A}$$

2 Solution





Les triangles AEH , BEF , CFG et DGH sont les homothétiques respectifs des triangles ABD , BAC , CBD et DCA dans le même rapport $\frac{1}{2}$. Comme indiqué sur les figures ci-contre, les aires sont multipliées par $\frac{1}{4}$. On a donc :

$$\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_3 = \frac{\text{aire(ABD)} + \text{aire(CBD)}}{4} = \frac{\text{aire(ABCD)}}{4}$$

$$\mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_4 = \frac{\text{aire(BAC)} + \text{aire(DCA)}}{4} = \frac{\text{aire(ABCD)}}{4}$$

On en déduit : $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4 = \dfrac{\text{aire(ABCD)}}{2}$

$$\boxed{\frac{\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4}{4} = \frac{\text{aire(ABCD)}}{8}}$$

Les 4 nombres $\mathscr{A}_i$ étant tous positifs, pour toute fonction f concave sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\frac{f(\mathscr{A}_1) + f(\mathscr{A}_2) + f(\mathscr{A}_3) + f(\mathscr{A}_4)}{4} \leqslant f\left(\frac{\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4}{4}\right)$$

On peut appliquer cette inégalité à la fonction racine cubique dont la dérivée seconde est $f'' : x \longmapsto -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$. Une étude de signe évidente nous assure de la concavité de la fonction racine cubique sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit :

$$\frac{\sqrt[3]{\mathscr{A}_1} + \sqrt[3]{\mathscr{A}_2} + \sqrt[3]{\mathscr{A}_3} + \sqrt[3]{\mathscr{A}_4}}{4} \leqslant \sqrt[3]{\frac{\text{aire(ABCD)}}{8}} = \frac{\sqrt[3]{\mathscr{A}}}{2}$$

$$\boxed{\text{Donc :} \quad \sqrt[3]{\mathscr{A}_1} + \sqrt[3]{\mathscr{A}_2} + \sqrt[3]{\mathscr{A}_3} + \sqrt[3]{\mathscr{A}_4} \quad \leqslant \quad 2\sqrt[3]{\mathscr{A}}}$$