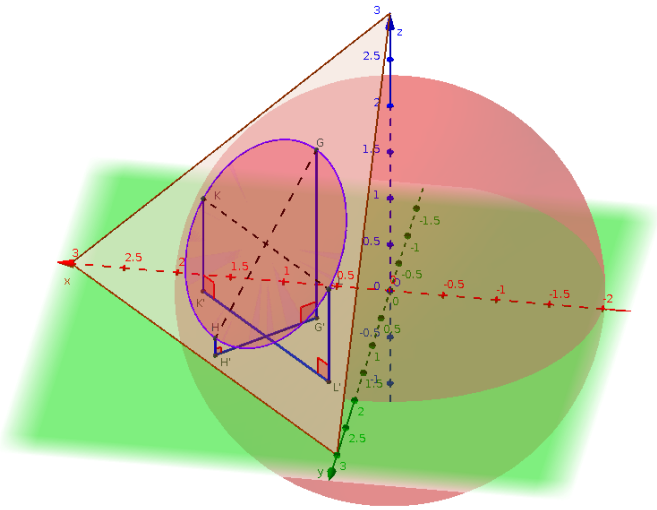
## Énoncé du problème

Soient $x, y$ $z$ trois réels strictement positifs tels que : $x+y+z=3$ et $x^2+y^2+z^2=4$. Déterminer le minimum et le maximum des valeurs prises par $\dfrac{x}{y}$.

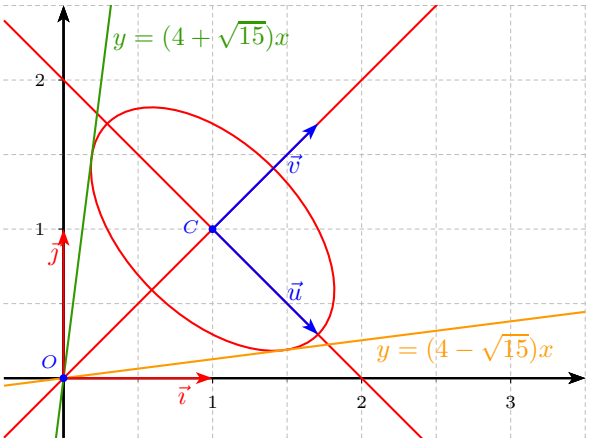
## Solution

Dans l'espace à 3 dimensions muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ qui vérifient $x+y+z=3$ et $x^2+y^2+z^2=4$ est l'intersection d'une sphère de centre O, rayon 2 et d'un plan passant par A(3;0;0), B(0;3;0) et C(0;0;3). Ce plan admet le vecteur orthogonal $\vec{n}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ Cette intersection est donc un cercle d'axe passant par O et dirigé par $\vec{n}$. Le centre de ce cercle est le point P(1;1;1) qui appartient de manière évidente au plan et à l'axe. Le rayon $r$ du cercle doit vérifier $r^2+\mathrm{OP}^2=4$, on a donc $r=1$.



La projection sur le plan $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de ce cercle est une ellipse dont le grand axe $[\mathrm{K'L'}]$ est la projection sur ce plan du diamètre [KL] du cercle, situé dans le plan d'équation $z=1$. La mesure de $[\mathrm{K'L'}]$ est donc la même que celle du diamètre du cercle, c'est à dire 2. Le petit axe de l'ellipse est la projection sur le plan $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du diamètre [GH] du cercle, situé dans le plan d'équation $y=x$. Les coordonnées de G et H sont donc de la forme $\left(1+\dfrac{b}{2},1+\dfrac{b}{2},1-b\right)$, elles doivent vérifier : $2\left(1+\dfrac{b}{2}\right)^2+(1-b)^2=4$. On peut donc poser $\mathrm{G}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{6}};1-\dfrac{1}{\sqrt{6}};1+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$ et $\mathrm{H}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{6}};1+\dfrac{1}{\sqrt{6}};1-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Le petit axe de l'ellipse projetée a donc pour mesure $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Dans le plan $(\mathrm{O}xy)$ muni d'un repère dont l'origine est le centre de l'ellipse et tel que les vecteurs unitaires de base dirigent les axes de l'ellipse, elle admet une équation de la forme $\dfrac{\mathrm{X}^2}{a^2}+\dfrac{\mathrm{Y}^2}{b^2}=1$, où $a$ et $b$ sont la mesure des demi-axes de l'ellipse. Pour l'ellipse qui nous concerne choisissons le repère orthonormé $(\mathrm{C},\vec{u},\vec{v})$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même direction et sens respectivement que $\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, comme illustré ci-contre. Dans ce repère, compte tenu des mesures 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ de ses demi-axes, notre ellipse admet pour équation $\mathrm{X}^2+3\mathrm{Y}^2=1$. Les minimum et maximum de $\dfrac{x}{y}$ ou $\dfrac{y}{x}$ sont obtenus comme coefficients directeur dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ des droites tangentes à l'ellipse passant par O.




Raisonnons dans le le repère $(\mathrm{C},\vec{u},\vec{v})$, les tangentes à l'ellipse en $\mathrm{T}(\mathrm{X}_0;\mathrm{Y}_0)$ admettent des équations de la forme $\mathrm{XX}_0+3\mathrm{YY}_0=1$. Pour obtenir des tangentes passant par $\mathrm{O}\left(0\,;-\sqrt{2}\right)$, on doit avoir $\mathrm{Y}_0=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ et $\mathrm{X}_0=\dfrac{\varepsilon\sqrt{30}}{6}$, avec $\varepsilon\in\{-1;1\}$. Les deux tangentes sont donc dirigées par les vecteurs : $\overrightarrow{\mathrm{OT}_\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon\sqrt{30}}{6}\vec{u}+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{6}+\sqrt{2}\right)\vec{v}=\dfrac{\varepsilon\sqrt{30}}{6}\vec{u}+\dfrac{\sqrt{50}}{6}\vec{v}$.

Ces vecteurs ont même direction que $\varepsilon\sqrt{3}\left(\vec{\imath}-\vec{\jmath}\right)+\sqrt{5}\left(\vec{\imath}+\vec{\jmath}\right)=\left(\varepsilon\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\vec{\imath}+\left(-\varepsilon\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\vec{\jmath}$. Les maximum et minimum de $\dfrac{x}{y}$ ou $\dfrac{y}{x}$ sont donc les coefficients directeurs ou leurs inverses, de ces vecteurs dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$,soit :

$$\boxed{m=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4-\sqrt{15}\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{m}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4+\sqrt{15}}$$