Énoncé du problème

Montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} > 1$

Solution

La fonction exponentielle de base $a \in]0\,;1[$: $\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$ est décroissante, car sa fonction dérivée est $\exp'_a(x) = \ln(a)a^x$, avec $\ln(a) < 0$.

Étant donné que pour $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\{\sin(x);\cos(x)\} \subset]0\,;1[$, on a les inégalités : $\left\{\begin{array}{ccc} (\sin x)^{\cos x} & > & (\sin x)^1 \\ (\cos x)^{\sin x} & > & (\cos x)^1 \end{array}\right.$.

On en déduit : $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} > \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{array}$ atteint son minimum 1 pour $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$; on en déduit :

$$\boxed{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} > \sin x + \cos x > 1 \text{ pour tout } x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[}$$