Corrigé du sujet n° 12

On remarque que : $\cos(\frac{\pi}{20}) + \cos(\frac{9\pi}{20}) = \cos(\frac{\pi}{20}) + \sin(\frac{\pi}{20})$.
Comme $\cos(\frac{\pi}{20}) > 0$ et $\sin(\frac{\pi}{20}) > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{20}) + \sin(\frac{\pi}{20}) = \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}} &\Leftrightarrow (\cos(\frac{\pi}{20}) + \sin(\frac{\pi}{20}))^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\
&\Leftrightarrow 2\cos(\frac{\pi}{20})\sin(\frac{\pi}{20}) + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\
&\Leftrightarrow 2\cos(\frac{\pi}{20})\sin(\frac{\pi}{20}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\
&\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}
\end{aligned}$$

Répondre à la question posée, revient à montrer cette dernière égalité.
On remarque que : $\sin(\frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{3\pi}{10})$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
2\sin(\frac{\pi}{10})\cos(\frac{\pi}{10}) &= \cos(\frac{2\pi}{10} + \frac{\pi}{10}) \\
&= \cos(\frac{2\pi}{10})\cos(\frac{\pi}{10}) - \sin(\frac{2\pi}{10})\sin(\frac{\pi}{10}) \\
&= (1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{10}))\cos(\frac{\pi}{10}) - 2\sin(\frac{\pi}{10})\cos(\frac{\pi}{10})\sin(\frac{\pi}{10}) \\
&= (1 - 4\sin^2(\frac{\pi}{10}))\cos(\frac{\pi}{10})
\end{aligned}$$

Ce qui revient à trouver la racine positive de l'équation suivante : $4x^2 + 2x - 1 = 0$, car $\cos(\frac{\pi}{10}) > 0$.
Après résolution, on trouve $\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. CQFD