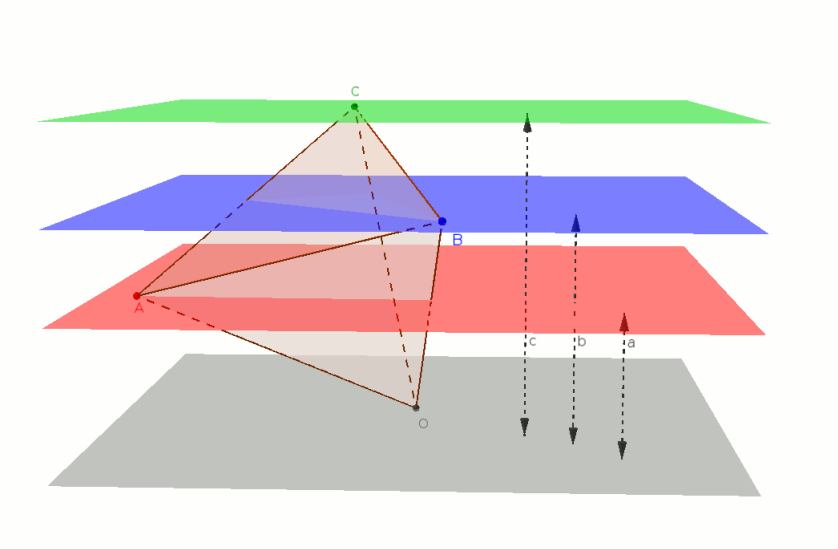
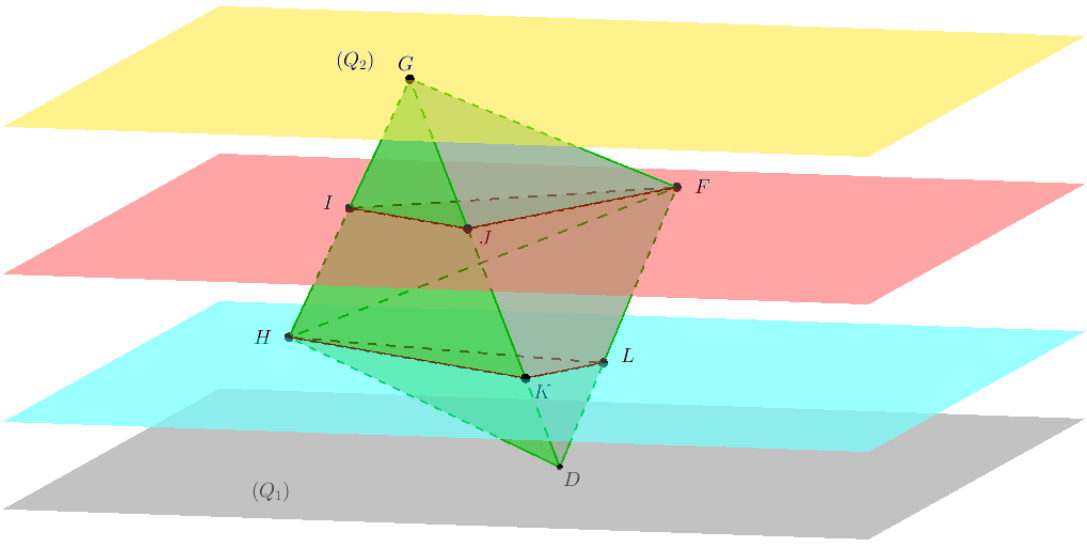
Corrigé du sujet n° 5

Soient (P_1) (P_2) (P_3)et (P_4) quatre plans respectant les données de l'énoncé ($a < b < c$) (voir la figure ci-dessous (merci Jacques))



et $DHGF$ un tétraèdre régulier.



On considère deux points K, et J appartenant à $[DG]$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$\frac{DK}{a} = \frac{KJ}{b-a} = \frac{JG}{c-b}$$

.

$$\frac{DK}{a} = \frac{KJ}{b-a} = \frac{JG}{c-b} \Leftrightarrow \frac{DK}{a} = \frac{KJ}{b-a} = \frac{JG}{c-b} = \frac{DJ}{b}$$

D'où $\frac{DK}{a} = \frac{DJ}{b} \Leftrightarrow \frac{DK}{DJ} = \frac{a}{b}$ (E_1).
De même, on obtient : $\frac{GJ}{GK} = \frac{c-b}{c-a}$ (E_2).
Soit $I \in [HG]$ tel que $\frac{HI}{b-a} = \frac{IG}{c-b}$, d'où $\frac{GI}{GH} = \frac{c-b}{c-a}$ (E_3).
Pour finir, on considère le point $L \in [DF]$ tel que $\frac{DL}{a} = \frac{LF}{b-a}$, ce qui nous permet d'écrire $\frac{DL}{DF} = \frac{a}{b}$ (E_4).
Les relations (E_1) et (E_4) nous permettent d'écrire : $\frac{DL}{DF} = \frac{DK}{DJ}$, de même les relations (E_2) et (E_3) nous donnent $\frac{GI}{GH} = \frac{GJ}{GK}$.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que $(LK) \parallel (FJ)$ et $(IJ) \parallel (HK)$.
Posons $Q_2 = (HKL)$ et $Q_3 = (FJI)$, par définition ces deux plans sont parallèles (chacun est défini par deux droites sécantes parallèles à deux droites sécantes de l'autre). On considère maintenant le plan Q_1 contenant le point D et parallèle à Q_2 et le plan Q_4 contenant le point G et parallèle à Q_3.
On vient de montrer qu'étant donné un téraèdre régulier, il existe bien quatre plans parallèles qui contiennent chacun un des sommets du tétraèdre.
De plus, il faut remarquer qu'il existe bien une similitude qui transforme notre tétraèdre régulier $DHGF$ en un autre tétraèdre régulier $OACB$ répondant à la question posée par l'énoncé c'est-à-dire qu'il existe bien un tétraèdre régulier dont les sommets appartiennent à chacun des plans suivants : (P_1) (P_2) (P_3)et (P_4).
Il me reste à calculer la longueur de l'arête de notre tétraèdre. On se place dans un repère où les coordonnées des points O, A, B et, C sont respectivement
$(0,0,0)$ $(0, \frac{d}{2}, \frac{d\sqrt{3}}{2})$ $(0, -\frac{d}{2}, \frac{d\sqrt{3}}{2})$et $(\frac{d\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{d\sqrt{3}}{3})$, avec d la longueur d'une arête.
Soient $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ le vecteur unitaire normal aux quatre plans dont l'origine est le point O et Δ la droite passant par le point O et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.
On a donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{u} = a$ où le point A' est le projeté orthogonal de A sur Δ, de même on a $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{u} = b$ et enfin $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OC'}.\overrightarrow{u} = c$.
D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\beta d}{2} + \frac{\gamma d\sqrt{3}}{2} & = a \\ \frac{-\beta d}{2} + \frac{\gamma d\sqrt{3}}{2} & = b \\ \frac{\alpha d\sqrt{6}}{3} + \frac{\gamma d\sqrt{3}}{3} = c \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{cases}$$

En tirant α, β, γ des trois premières relations et en les remplaçant dans la dernière, on

obtient la valeur cherchée :

$$d = \sqrt{\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)}$$