Corrigé du sujet n° 3

Je pose $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2)$, avec $1 \leqslant a \leqslant 9, 0 \leqslant b \leqslant 9$ et $0 \leqslant c \leqslant 9$. Je sais que N est divisible par 11 si et seulement si $b = a + c$ ou $b = a + c - 11$. Je vais donc envisager les deux cas.

1. Cas : $b = a + c$

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) &\Leftrightarrow 100a + 10(a + c) + c = 11(a^2 + (a + c)^2 + c^2) \\ &\Leftrightarrow 110a + 11c = 11(2a^2 + 2c^2 + 2ac) \\ &\Leftrightarrow 10a + c = 2a^2 + 2c^2 + 2ac \end{aligned}$$

Ce qui me conduit à distinguer cinq cas pour une raison de parité : $c = 0, c = 2, c = 4, c = 6$ et $c = 8$.

- $c = 0$
  J'ai donc $a = 0$ ou $a = 5$, or $a = 0$ est exclu car $1 \leqslant a \leqslant 9$, donc $b = 5$, ce qui me donne le nombre 550.
- $c = 2$
  L'équation $a^2 - 3a + 3 = 0$ n'admet pas de solution.
- $c = 4$
  L'équation $a^2 - a + 14 = 0$ n'admet pas de solution.
- $c = 6$
  L'équation $a^2 + a + 33 = 0$ n'admet pas de solution.
- $c = 8$
  L'équation $a^2 - 3a + 60 = 0$ n'admet pas de solution.

2. Cas : $b = a + c - 11$

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) &\Leftrightarrow 100a + 10(a + c - 11) + c = 11(a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2) \\ &\Leftrightarrow 10a + c - 10 = 2a^2 + 2c^2 + 2ac - 22a - 22c + 121 \\ &\Leftrightarrow c - 131 = 2a^2 + 2c^2 + 2ac - 32a - 22c \end{aligned}$$

Ce qui me conduit à distinguer encore cinq cas : $c = 1, c = 3, c = 5, c = 7$ et $c = 9$.
Seul $c = 3$ fournit une solution : le nombre 803

Conclusion : Les seuls nombres qui vérifient la condition imposée par l'énoncé sont 550 et 803