Corrigé du sujet n° 16

Comparer les nombres 2012^{2012} et 2013^{2011} , revient à comparer $2012 \ln(2012)$ et $2011 \ln(2013)$, car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Pour cela on va introduire la fonction suivante : $f(x) = (2012 - x) \ln(x + 2012)$ dérivable sur $[0; +\infty[$, et puis on compare $f(0)$ et $f(1)$ en étudiant le sens de variation de f .

$$f'(x) = -\ln(x+2012) + \frac{2012-x}{x+2012}. \text{ Or } \frac{2012-x}{x+2012} \leq 1 \text{ et } \ln e = 1, \text{ donc } f'(x) \leq \ln\left(\frac{e}{x+2012}\right) < 0,$$

$$\text{car } 0 < \frac{e}{x+2012} < 1.$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, ce qui donne $f(0) > f(1)$. CQFD