Corrigé du sujet n° 15

On commence par calculer l'aire du rectangle R_2. On a donc $\mathcal{A}(R_2) = PQ \times LN$. On utilise le théorème de Thalès dans les triangles ABC et ALN, on obtient : $\dfrac{AL}{AB} = \dfrac{LN}{BC}$, d'où
$LN = \dfrac{AL}{AB} \times BC$, or $\dfrac{AL}{AB} = \dfrac{AP}{AR}$, donc $\mathcal{A}(R_2) = PQ \times (AR - PQ - QR) \times \dfrac{BC}{AR}$.
Si on ne fait varier que la hauteur du rectangle R_2 en fixant celles du rectangle R_1 et du triangle ABC. $\mathcal{A}(R_2)$ est maximale lorsque $PQ = \dfrac{AR - QR}{2}$.
L'aire du rectangle R_1 est $\mathcal{A}(R_1) = QR \times MO$. On utilise le théorème de Thalès dans les triangles ABC et AMO, on obtient : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MO}{BC}$, d'où
$MO = \dfrac{AM}{AB} \times BC$, or $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AQ}{AR}$, donc $\mathcal{A}(R_1) = QR \times (AR - QR) \times \dfrac{BC}{AR}$.
En remplaçant PQ par $\dfrac{AR - QR}{2}$ dans l'expression de R_2, on obtient :
$\mathcal{A}(R_2) = (\dfrac{AR - QR}{2})^2 \times \dfrac{BC}{AR}$
On calcule $\dfrac{\mathcal{A}(R_1) + \mathcal{A}(R_2)}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{(\dfrac{AR - QR}{2})^2 \times \dfrac{BC}{AR} + QR \times (AR - QR) \times \dfrac{BC}{AR}}{\dfrac{AR \times BC}{2}}$.

L'expression $\dfrac{\mathcal{A}(R_1) + \mathcal{A}(R_2)}{\mathcal{A}(ABC)}$ est maximale lorsque le numérateur est maximal, car le dénominateur est constant. On peut considérer le numérateur comme un polynôme du second degré en de QR, celui-ci atteint son maximum en $QR = \dfrac{AR}{3}$. En remplaçant QR par $\dfrac{AR}{3}$ dans $\dfrac{\mathcal{A}(R_1) + \mathcal{A}(R_2)}{\mathcal{A}(ABC)}$, on obtient : $\dfrac{2}{3}$.