Corrigé du sujet n° 5

On considère le polynôme suivant $P(X) = (X - a)(X - b)(X - c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$. D'après la relation entre les racines et les coefficients d'un polynôme, on peut écrire $P(X) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$, avec la notation classique $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + ac + bc$, $\sigma_3 = abc$.
En faisant le changement suivant : $X = Y + \frac{\sigma_1}{3}$, on obtient le polynôme
$P(Y) = Y^3 + (\sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{3})Y + \frac{\sigma_1\sigma_2}{3} - \sigma_3 - \frac{2\sigma_1^3}{9}$. En dérivant ce dernier on obtient $P'(Y) = 3Y^2 + \sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{3}$.
Pour que $P'(Y)$ ait deux racines distinctes, il faut et il suffit que $-\frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_1^2}{9}$ soit un carré. En posant $f(a, b, c) = \frac{\sigma_1^2 - 3\sigma_2}{9} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{9}$, on a alors $f(a + x, b + x, c + x) = f(a, b, c)$, donc on peut prendre $a = 0$. Il me reste à trouver les couples (b, c) vérifiant la relation suivante :
$b^2 + c^2 - bc = 9d^2 = (3d)^2 \quad (E)$.
A l'aide d'un algorithme, on peut trouver les couples suivants $(15; 63), (21; 45), (135; 231)$......
On peut aussi raisonner de la façon suivante : Après avoir remarqué que $x^2 + y^2 - xy = 1$ est une ellipse et en faisant une paramétrisation rationnelle de celle-ci, on pourra trouver des couples solutions à coordonnées rationnelles, puis les multiplier par un multiple du ppcm de leurs dénominateurs pour qu'elles vérifient la relation (E).