Corrigé du sujet n° 15

Je vais utiliser l'inégalité suivante valable pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ avec $x_i > 0$ et $y_i > 0$:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}$$

On peut la démontrer en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs suivants :
$(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{y_2}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt{y_n}})$ et $(\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, ..., \sqrt{y_n})$.
Ou bien on la démontre directement avec l'équivalence suivante : $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} \geqslant \frac{(x_1 + x_2)^2}{y_1 + y_2} \Leftrightarrow (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 \geqslant 0$ et un raisonnement par récurrence.
J'ai donc pour $n = 3$:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geqslant \frac{(x_1 + x_2)^2}{y_1 + y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{y_1 + y_2 + y_3}$$

Je pose d'une part $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ et d'autre part $y_1 = x^2, y_2 = y^2, y_3 = z^2$. En remplaçant dans la double inégalité précédente, j'obtiens :

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + 1 \geqslant \frac{9}{4} &\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \geqslant \frac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \geqslant \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8xy \leqslant 0
\end{aligned}$$

La résolution de l'équation $x^2 + y^2 - 8xy = 0$ donne $x_1 = 4y - y\sqrt{15}$ et $x_2 = 4y + y\sqrt{15}$.

L'expression $x^2 + y^2 - 8xy$ est négative si et seulement si $\frac{x}{y} \in [4 - \sqrt{15}; 4 + \sqrt{15}]$. CQFD

Remarque : on peut aussi poser $t = \frac{x}{y}$ dans la dernière inégalité et résoudre l'inéquation en t....