Corrigé du sujet n^{o} 11

On utilise l'inégalité suivante : $(1+x)^y < 1+xy, \forall x \in]0;1[, \forall y \in]0;1[$ pour démontrer l'inégalité demandée.
$(\frac{1}{\sin x})^{\cos x} = (1 + \frac{1-\sin x}{\sin x})^{\cos x}$, donc d'après l'inégalité précédente, on a :
$(1 + \frac{1-\sin x}{\sin x})^{\cos x} < 1 + \frac{\cos x(1-\sin x)}{\sin x}$,

soit $(\frac{1}{\sin x})^{\cos x} < \frac{\sin x + \cos x - \cos x \sin x}{\sin x}$,

ou $(\sin x)^{\cos x} > \frac{\sin x}{\sin x + \cos x - \cos x \sin x}$, de même on a :

$(\cos x)^{\sin x} > \frac{\cos x}{\cos x + \sin x - \cos x \sin x}$,

et en ajoutant les deux dernières inégalités, on obtient :

$(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x} > \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x - \cos x \sin x} > 1$, d'où l'inégalité demandée.

On peut démontrer l'inégalité admise en étudiant la fonction suivante $f(x) = 1 + xy - (1+x)^y$ sur $]0;1[$ avec $y \in]0;1[$