Corrigé du sujet n° 8

On considère le nombre suivant : $N = \underbrace{82574...82574}_{77\text{fois}}6042$ avec $2014 \times 41 = 82574$ et $2014 \times 3 = 6042$, ce qui donne $(8+2+5+7+4) \times 77 = 2002$ et $2002 + 12 = 2014$ avec $5 \times 77 + 4 = 389$ chiffres. Le nombre N est divisible par 2014 et la somme de ses chiffres en base dix est 2014.

Soit N' un des entiers cherchés écrit en base dix :
$N' = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} .....a_2 a_1 a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + ...a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$.
On a donc : $N' \equiv 2014[9]$, or $2014 \equiv 7[9]$, c'est-à-dire $2007 \equiv 0[9]$. Remarquons que $2007 = 9 \times 223$, avec 223 un nombre premier, donc le plus petit nombre cherché aura au moins 224 chiffres.
On s'occupe d'abord de la condition suivante : la somme de ses chiffres est divisible par 2014 .
On cherche notre nombre sous la forme suivante : $N_1 = \underbrace{999...999}_{223\text{fois}}a_0$, (a_0 peut prendre la place de n'importe quel chiffre dans l'écriture décimale de N_1), ce qui conduit à $a_0 = 7$, car $N_1 \equiv a_0 \equiv 7[9]$ et $1 \leqslant a_0 \leqslant 9$, ce qui est impossible, car il faut qu'il soit divisible par 2.
Maintenant cherchons notre nombre sous la forme suivante :
$N_2 = \underbrace{999...999}_{222\text{fois}}a_1 a_0$, ce qui conduit à $a_0 = a_1 = 8$, car $N_2 \equiv a_1 + a_0 \equiv 7[9]$.
On doit prendre 8 comme chiffre des unités pour que N_2 soit divisible par 2.
Maintenant il faut trouver l'endroit où on doit placer le deuxième 8 pour que les conditions suivantes soient réunies :

- N_2 est divisble par 19 et 53, car $2014 = 2 \times 19 \times 53$.
- N_2 est le plus petit possible.

À l'aide d'un tableur (merci Jacques Marot) par exemple, on détermine le plus petit nombre vérifiant les conditions de l'énoncé : $N_2 = \underbrace{999...999}_{108\text{fois}}8\underbrace{999...999}_{114\text{fois}}8$.
Ou bien on écrit

$$\begin{aligned} N_2 &= 9 \times 10^{223+} 9 \times 10^{222} + ...8 \times 10^k + ... + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 8 \\ &= (10-1) \times 10^{223+} (10-1) \times 10^{222} + ...(10-2) \times 10^k + ... + (10-1) \times 10^2 + (10-1) \times 10 + 8 \\ &= 10^{224} - 10^k - 2 \end{aligned}$$

et on termine la démonstration comme celle de Jacques Marot ou Michel Fauconnet.