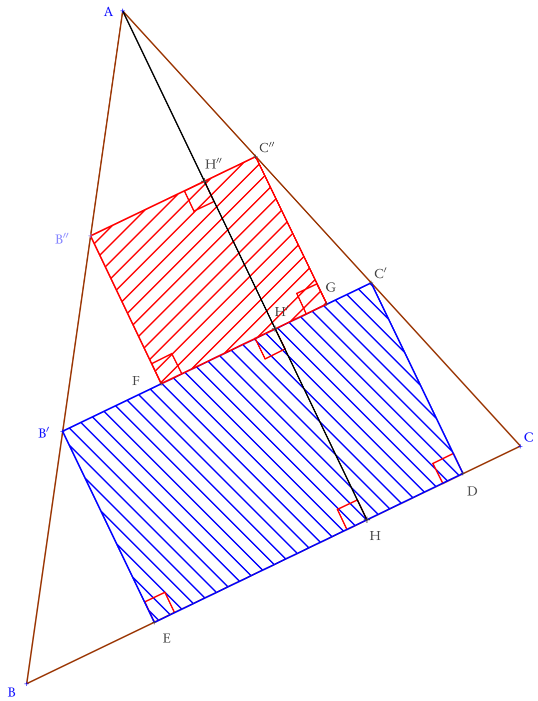
Énoncé du problème

Un paysagiste est chargé par un propriétaire de l'organisation d'une parcelle triangulaire. Le propriétaire souhaite faire deux terrasses (parties hachurées de la figure) dont l'aire soit maximale par rapport à la surface de la parcelle. Le reste de la parcelle sera constituée de jardins. Pouvez-vous aider le paysagiste à remplir son contrat ?

Solution



Soit $k \in]0\,;1[$ le rapport d'homothétie transformant le triangle ABC en AB′C′ et $k' \in]0\,;k[$ le rapport d'homothétie transformant le triangle ABC en AB″C″. Pour calculer l'aire du rectangle B′C′DE, on a besoin de la longueur du segment [B′C′] qui est égale à kBC, et de la longueur du segment [C′D] qui est égale à HH′. Si on désigne par le réel h la hauteur du triangle ABC relative à son côté [BC], on obtient $\mathrm{C'D} = \mathrm{HH'} = h - \mathrm{AH'} = h - kh$. En désignant par $\mathscr{A}$, l'aire du triangle ABC, on exprime celle du rectangle B′C′DE par :

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = k\mathrm{BC}(1-k)h = k(1-k)\times 2.\mathscr{A}}$$

De même l'aire $\mathscr{A}_2$ du rectangle B″C″GF s'obtient à l'aide de $\mathrm{B''C''} = k'\mathrm{BC}$ et de $\mathrm{H'H''} = (k-k')h$

$$\boxed{\mathscr{A}_2 = k'\mathrm{BC}(k-k')h = k'(k-k')\times 2.\mathscr{A}}$$

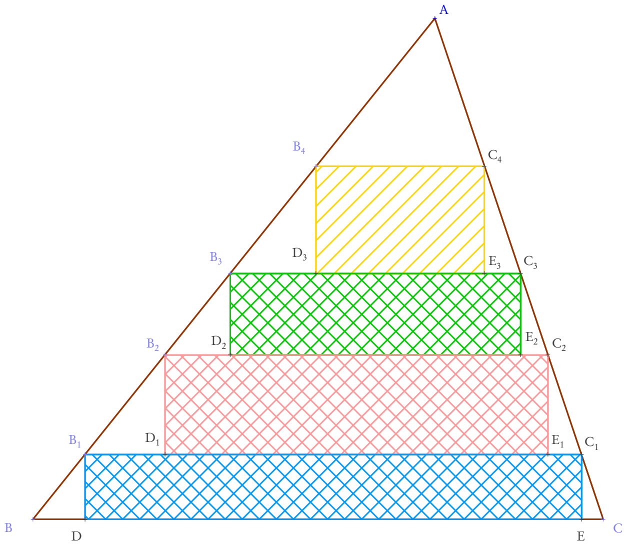
L'aire totale des deux rectangles peut donc s'exprimer à l'aide de la fonction des deux variables k et k' suivante

$$f:\ \begin{array}{ccc}]0\,;1[\times]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (k;k') & \longmapsto & 2.\mathscr{A}(-k^2+(1+k')k-k'^2) \end{array}$$

En retenant que toute fonction $g:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array}$ admet un extremum en $-\dfrac{b}{2a}$ égal à $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, notre fonction f avec k' fixé, passe par le maximum $\mathscr{M}(k') = 2.\mathscr{A}\dfrac{(1+k')^2-4k'^2}{4}$ pour $k = \dfrac{1+k'}{2}$.

Cette fonction $\mathscr{M}:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k' & \longmapsto & \dfrac{\mathscr{A}}{2}(-3k'^2+2k'+1) \end{array}$ admet le maximum $\dfrac{\mathscr{A}(4+12)}{2\times 12}$ pour $k' = \dfrac{1}{3}$.

L'aire totale maximum des deux rectangles est donc $\dfrac{2}{3}\mathscr{A}$ obtenue avec $k' = \dfrac{1}{3}$ et $k = \dfrac{1+k'}{2} = \dfrac{2}{3}$. Pour optimiser l'aire totale des terrasses, le paysagiste doit donc partager en trois segments d'égales longueurs 2 cotés du triangle, pour tracer deux parallèles au troisième côté. Les points de partage des côtés du triangle seront sommets des rectangles, les droites parallèles seront support de deux cotés des rectangles.



On peut obtenir une généralisation de ce problème à n rectangles, à disposer dans le triangle ABC, de manière à avoir les sommets des rectangles sur les côtés [AB], [AC] et des parallèlesà (BC), comme illustrée dans la figure à gauche. La preuve faite ci-dessus pour deux rectangles sert à initialiser la démonstration par récurrence, montrant que l'aire maximum des rectangles est $\dfrac{n}{n+1}\mathscr{A}$. Cette optimisation étant obtenue en divisant les côtés [AB] et [AC] en $n+1$ segments de longueurs égales.

L'hypothèse de récurrence faite pour $n-1$ rectangles, permet d'exprimer l'aire des $(n-1)$ plus petits rectangles, qu'il est possible de disposer dans le triangle $\mathrm{AB_1C_1}$, qui ont nécessairement une aire totale maximum. Sinon, en gardant le même emplacement des points $\mathrm{B_1}$ et $\mathrm{C_1}$, nous pourrions augmenter l'aire totale des n rectangles, en disposant autrement les points B_n et C_n pour $n>1$.

Si on désigne par $\mathscr{A}'$ l'aire du triangle $\mathrm{AB_1C_1}$, l'aire totales des $n-1$ rectangles, obtenues en divisant les côtés $[\mathrm{AB_1}]$ et $[\mathrm{AC_1}]$ en n segments de longueurs égales est $\dfrac{n-1}{n}\mathscr{A}'$. Soit $k\in\,]0\,;1[$ le rapport d'homothétie qui transforme le triangle ABC en $\mathrm{AB_1C_1}$, Avec le même raisonnement que pour deux rectangles, on peut exprimer l'aire totale des n rectangles par $2(1-k)k\mathscr{A}+\dfrac{n-1}{n}\mathscr{A}'$. Or $\mathscr{A}'=k2\mathscr{A}$, il s'agit donc de trouver la valeur de k qui maximise $\mathscr{A}\left(2(1-k)k+\dfrac{n-1}{n}k^2\right)$. Il suffit donc de trouver le maximum de $f(k)=-\dfrac{n+1}{n}k^2+2k$, qui est $\dfrac{n}{n+1}$ obtenu pour $k=\dfrac{n}{n+1}$.

Cela confirme que l'aire maximum de n rectangles à disposer dans le triangle ABC, selon les règles énoncées plus haut, est $\dfrac{n}{n+1}\mathscr{A}$. On obtient ces rectangles en traçant des parallèles à (BC), passant par les points qui partagent les côtés [AC] et [AB] en $n+1$ segments d'égales longueurs.

Ce même raisonnement aurait pu servir à faire la démonstration pour deux rectangles, en vérifiant avec une fonction d'une seule variable, qu'il faut utiliser les milieux des côtés [AB] et [AC] pour maximiser l'aire d'un seul rectangle.