Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 12

Tout d'abord on va donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

$\frac{\pi}{10}$ est solution de l'équation trigonométrique $\sin 2x = \cos 3x$ car le sinus d'un angle est le cosinus de son complémentaire. Cette équation peut être travaillée avec les formules d'addition et de multiplication des arcs et prend alors la forme $\cos x(1-4\sin^2 x) = 2\sin x\cos x$. On peut simplifier cette équation par $\cos x$ puisque $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$ et donc $\frac{\pi}{10}$ vérifie l'équation $4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$. Comme $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$ on en retient la solution positive et on a $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. L'égalité $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ permet alors d'obtenir enfin la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à savoir $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

On revient maintenant au problème posé.

On observe tout d'abord que $\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{20}\right)$ et que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{20}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

En utilisant maintenant l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ trouvée auparavant on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Il reste à transformer l'expression $\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

$$\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

L'égalité proposée est bien exacte.