Solution proposée par frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 15

Tout ce qui est montré ci-dessous s'applique aux triangles acutangles. Pour les triangles obtusangles il faut positionner le triangle pour que sa base corresponde au plus long côté sinon la construction des rectangles est problématique.
On note b la base [BC] du triangle ABC, h sa hauteur et $\mathcal{A}$ son aire ; L_1 la base du rectangle marron, h_1 sa hauteur et $\mathcal{A}_1$ son aire ; L_2 la base du rectangle vert, h_2 sa hauteur et $\mathcal{A}_2$ son aire. Enfin on note $h_3 = h - h_1 - h_2$.
On cherche à maximiser la quantité $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)/\mathcal{A}$. , c'est-à-dire la quantité :

$$\frac{2(L_1h_1+L_2h_2)}{bh} \quad (1)$$

D'après la propriété de Thalès on a :

$$\frac{L_1}{b}=\frac{h_2+h_3}{h}$$

$$\frac{L_2}{L_1}=\frac{h_3}{h_3+h_2}$$

En exprimant L_1 et L_2 en fonction de h, b, h_2 et h_3, le rapport (1) prend alors la forme :

$$\frac{2(h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3)}{h^2}$$

Comme $2/h^2$ est fixé, il revient au même de chercher à maximiser $h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3$.
On a l'identité $(h_1 + h_2 + h_3)^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3)$ qui donne ici
$h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 2(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3)$ et donc maximiser $h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3$ revient à minimiser $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$.
La moyenne arithmétique des réels positifs h_1, h_2 et h_3 est toujours inférieure ou égale à leur moyenne quadratique avec égalité quand tous ces réels sont égaux. On a donc, en élevant cette inégalité au carré :

$$\frac{(h_1+h_2+h_3)^2}{3^2} \le \frac{h_1^2+h_2^2+h_3^2}{3}$$

ou encore

$$\frac{h^2}{3} \le h_1^2+h_2^2+h_3^2$$

avec égalité quand $h_1 = h_2 = h_3 = h/3$.
Les deux rectangles occupent donc une aire maximale dans le triangle quand leurs hauteurs respectives valent le tiers de la hauteur du triangle.
La valeur maximale du taux de remplissage est alors de 2/3 et est indépendante de la hauteur et donc de la base choisie.

.