

Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 3

Si N est un nombre de trois chiffres multiple de 11 alors $N/11$ est un nombre de deux chiffres compris entre 10 et 90 (tous deux inclus). $N/11$ est de la forme $10A + B$. Deux cas se présentent.

$$\text{Soit } A + B < 10 \text{ et alors } N = 100A + 10(A + B) + B \quad (1)$$

$$\text{Soit } 9 < A + B < 18 \text{ et alors } N = 100(1 + A) + 10(A + B - 10) + B \quad (2)$$

Dans le cas (1) l'énoncé demande de trouver A et B pour que $10A + B = A^2 + (A + B)^2 + B^2$. On tire de cette dernière égalité $B = 2(A^2 + B^2 + AB - 5A)$ et donc B est pair. On teste alors successivement $B = 0, 2, 4, 6$ et 8 en tenant compte des contraintes imposées à A et B et on trouve une seule solution, à savoir $A = 5$ et $B = 0$. Le nombre 550 vérifie les conditions de l'énoncé.

Dans le cas (2) l'énoncé demande de trouver A et B pour que $10A + B = (1 + A)^2 + (A + B - 10)^2 + B^2$. On tire de cette dernière égalité $B = 1 + 2(A + A^2 - 5A + 50 + B - 10A - 10B + AB)$ et donc B est impair. Comme B ne peut être égal à 1 dans le cas (2), on teste successivement $B = 3, 5, 7$ et 9 toujours en tenant compte des contraintes imposées dans ce cas à A et B . On trouve une seule solution à savoir $A = 7$ et $B = 3$. Le nombre 803 vérifie donc aussi les conditions de l'énoncé.