Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 13

On note $g = f o f$. On a, par associativité de la loi de composition, $g o f = f o g$ et d'après l'énoncé $g(0) = 2$.
Les points fixes de g vérifient l'équation $g(x) = x$ soit $x^2 - 2x + 2 = x$ dont les solutions sont 1 et 2. On a donc $g(1) = 1$ et $g(2) = 2$.
On pose $f(2) = a$. On a $f o g(2) = f(2) = a$ et $g o f(2) = g(a)$, donc $g(a) = a$, d'où a est un point fixe de g c'est-à-dire que a peut valoir 1 ou 2.
On note $f(0) = b$.
Si $f(2) = 1$, on a $g(b) = g o f(0) = f o g(0) = f(2) = 1$ et b vérifie donc l'équation $b^2 - 2b + 2 = 1$ donc $b = 1$, d'où $f(0) = 1$.
Si $f(2) = 2$, on a $g(b) = g o f(0) = f o g(0) = f(2) = 2$ et b vérifie donc l'équation $b^2 - 2b + 2 = 2$ donc $b = 2$ ou 0, d'où $f(0) = 2$ ou 0 mais $f(0) = 0$ est à rejeter car alors $g(0)$ vaudrait 0 or on sait qu'il vaut 2.
Il y a deux valeurs possibles pour $f(0)$: 1 ; 2.