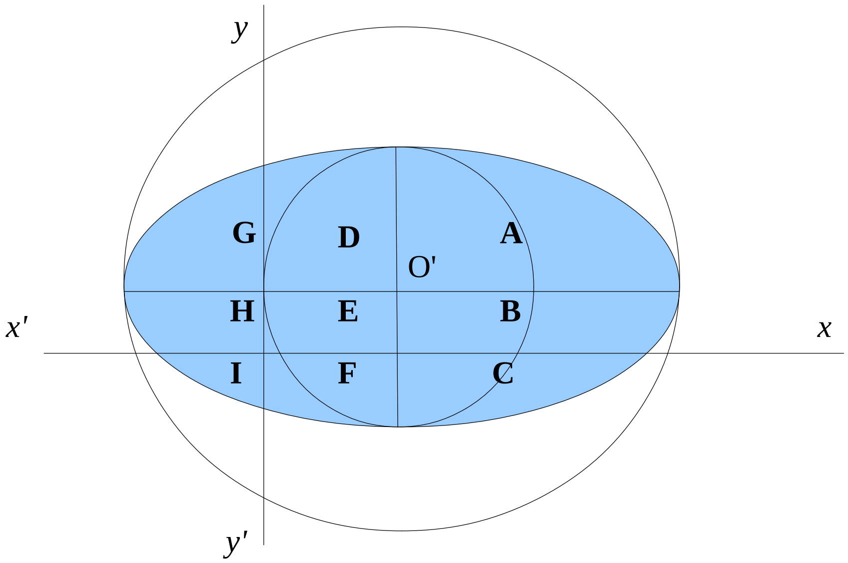
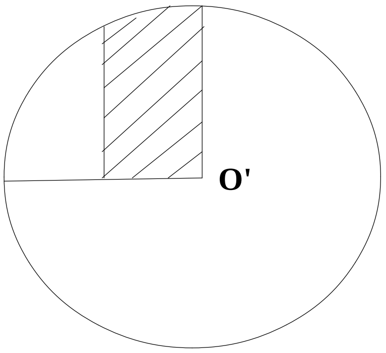
Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine numéro 7

On note E l'aire de cette ellipse et O' son centre de coordonnées (10 ; 6). Son demi-grand axe vaut 20 et son demi-petit axe vaut 12. On sait qu'alors E vaut $\pi\times20\times12$.
On note a_1 l'affinité orthogonale de rapport 12/20, de base le grand axe de l'ellipse et a_2 l'affinité orthogonale de rapport 20/12 , de base le petit axe de l'ellipse ; D_1 le disque de centre O' et de rayon 20 (correspondant au cercle principal de l'ellipse) ; D_2 le disque de centre O' et de rayon 12 (correspondant au cercle secondaire de l'ellipse).
Les axes du repère et de l'ellipse partagent l'ellipse en 9 parties d'aires A, B, C, D, E, F, G, H et I.

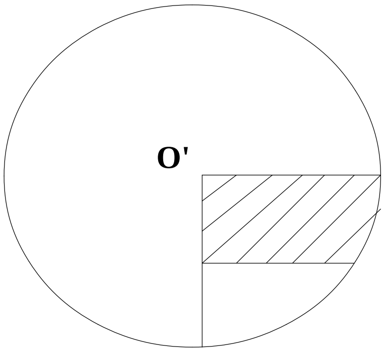


On sait d'une part que dans une affinité les aires sont multipliées par le rapport de l'affinité, on observe d'autre part que les axes du repère coupent les demi-axes de l'ellipse en leur milieu.

La partie d'aire D est l'image par a_1 de la partie hachurée de D_1 illustrée ci-dessous :



L'aire de cette partie hachurée vaut $(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6})\times20^2$, expression obtenue en la décomposant en un triangle rectangle et un secteur. L'aire D vaut donc $(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6})\times12\times20$.
La partie d'aire B est l'image par a_2 d'une partie hachurée de D_2 illustrée ci-dessous :



L'aire de cette partie hachurée vaut $(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6})\times 12^2$, expression obtenue en la décomposant en un triangle rectangle et un secteur. L'aire B vaut donc $(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6})\times 12\times 20$.

On a maintenant les relations suivantes entre les aires des 9 parties :
A = E/4 ; B = D ; C = A – B = A – D = G ; F = D – E = B – E = H ; I = C – F = A – 2B + E.
Par ailleurs E = $\frac{20\times 12}{4}$.
La quantité demandée :
$A_1 - A_2 + A_3 - A_4$ = (E/4 + B + B + E) – [(B – E) + (E/4 – B)] + (E/4 – 2B + E) – [(E/4 – B) + (B – E)] = 4E
= 20×12 = 240 .