

Exercice 2:

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

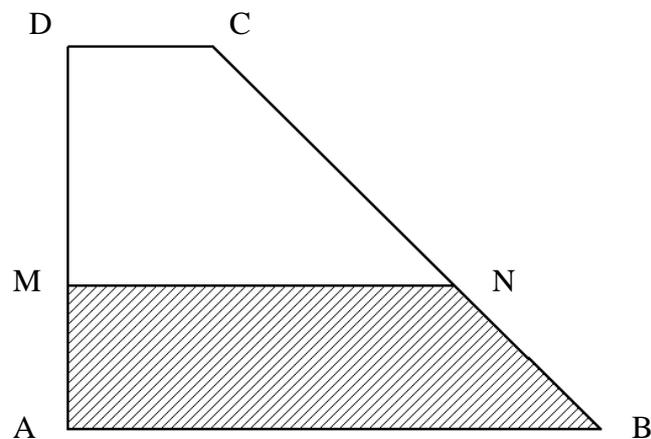
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45^\circ$.
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et $AD > 2$.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Solution

1) De l'égalité $m^2 - p^2 = 8$, on déduit (*) : $m^2 = p^2 + 8$ donc : $p < m < p + 3$, et $m = p + 1$ ou $m = p + 2$. Avec $m = p + 1$, (*) est impossible. Avec $m = p + 2$, il vient $p = 1$ et $m = 3$.

2) une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :

$$DC = AB - AD ; MN = AB - 2$$

L'égalité des aires conduit alors à : $(AB - 4)^2 - (AD - AB)^2 = 8$.

On obtient avec 1) : $AB = 7$, $AD = 6$, $DC = 1$.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).