Exercices niveau 1èreS utilisant un logiciel de calcul formel

Un logiciel de calcul formel pour quoi faire ?

- Du calcul numérique exact
- Du calcul algébrique : développer, factoriser, résoudre une (in)équation, un système
- Du calcul infinitésimal : dériver, intégrer

Pour quelle activité mathématique ?

- Pour expérimenter
- Pour conjecturer un résultat avant la démonstration
- Pour se décharger des calculs techniques et se concentrer sur le raisonnement
- Pour effectuer des calculs que l'on ne sait pas faire
- Pour contrôler les résultats

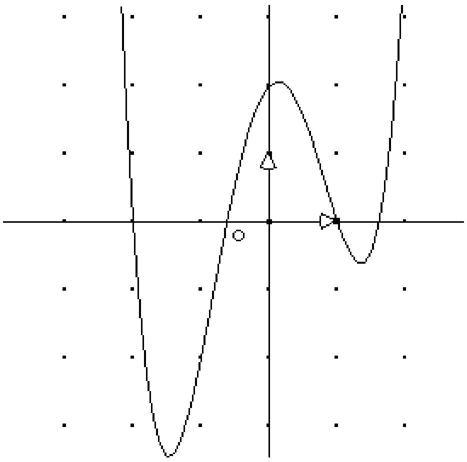
Dans quelle configuration ?

- En classe entière avec un vidéoprojecteur
- En salle informatique en TP

Exercice 1 : (source : Manuels de 1èreS)

Proposé en classe entière en application directe du chapitre « Second degré ». Le but est la découverte du logiciel et de ses fonctions élémentaires de calcul algébrique pour factoriser des polynômes de degré 3 ou plus.

Remarque : XCas possède deux modes de calcul algébrique (avec ou sans l'usage des racines carrées). Ici, il faudra au préalable décocher « Sqrt » dans le menu « Cfg/Cas Configuration ».



Soit ci-contre la courbe C représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$

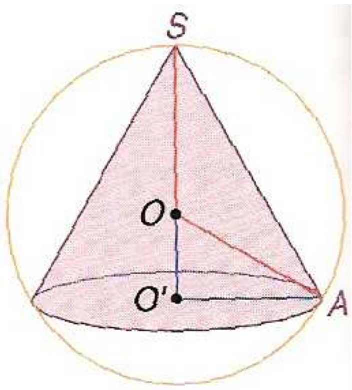
1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$
2. a) Proposer à l'aide de XCas une factorisation de $f(x)$.

   b) Développer à la main cette forme factorisée. Est-elle correcte ?
3. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2: (source : Manuels de 1èreS)

Proposé en classe entière à la fin du chapitre « Application de la dérivation ». L'utilisation du logiciel n'était pas prévue à priori mais les élèves l'ont réclamé lorsqu'ils n'arrivaient pas à dériver la fonction à paramètre. L'analyse du résultat fourni par XCas les a guidés dans le calcul. A la fin de l'étude, le logiciel a permis le contrôle de la réponse.

On inscrit un cône dans une sphère de centre O et de rayon R comme indiqué sur la figure.
Déterminer la distance OO' pour que ce cône ait un volume maximal.



Exercice 3: (source : Annales de l'épreuve pratique du bac S, 2008)

Proposé en classe entière en application directe du chapitre « Produit scalaire/Equation cartésienne d'une droite », les élèves se relayant à l'ordinateur. Ici le logiciel permet de résoudre un système linéaire très technique et dont la résolution à la main n'apporte rien au chapitre en cours.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$). On appelle E la courbe d'équation $= \frac{1}{x}$.

On désigne par a, b, c trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par A, B, C les points de E d'abscisses respectives a, b, c. Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie puis étudier la position du point H.
Démontrer votre conjecture.

Exercice4: Tangente commune à deux paraboles.

Proposé en salle informatique, il peut être traité sans logiciel de calcul formel. L'optique est de développer les compétences d'expérimentations et de donner du sens aux équations obtenues, en demandant à l'élève d'expliciter ses raisonnements, tout en s'affranchissant à l'aide de Xcas des calculs.

Soient *f* et *g* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + x - 2$.

On appelle respectivement C_f et C_g leurs représentations graphiques dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Le but du problème est de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g.

Partie A - Exploration avec GeoGebra

1. Ouvrir GeoGebra

2. Définir les fonctions *f* et *g*.

3. Créer un curseur *a* qui varie entre -5 et 5 avec un pas de 0.1 .

5. Définir le point A de C_f d'abscisse *a*, c'est-à-dire le point de coordonnées (*a; f(a)*).

6. En déplaçant le curseur, conjecturer le nombre de tangentes communes aux deux courbes.

7. Déterminer les valeurs approchées de *a* correspondant aux tangentes trouvées.

Partie B - Étude mathématique avec Xcas.

1. On appelle A le point de la courbe C_f d'abscisse *a*. Calculer l'équation réduite de la tangente T_a à C_f au point A.

2. Démontrer que les points d'intersection de T_a avec la courbe C_g ont des abscisses qui sont solutions de l'équation : $x^2 + (2a-1)x - a^2 + 2 = 0$.

3. Déterminer les valeurs de *a* pour lesquelles l'équation $x^2 + (2a-1)x - a^2 + 2 = 0$ admet une racine double.

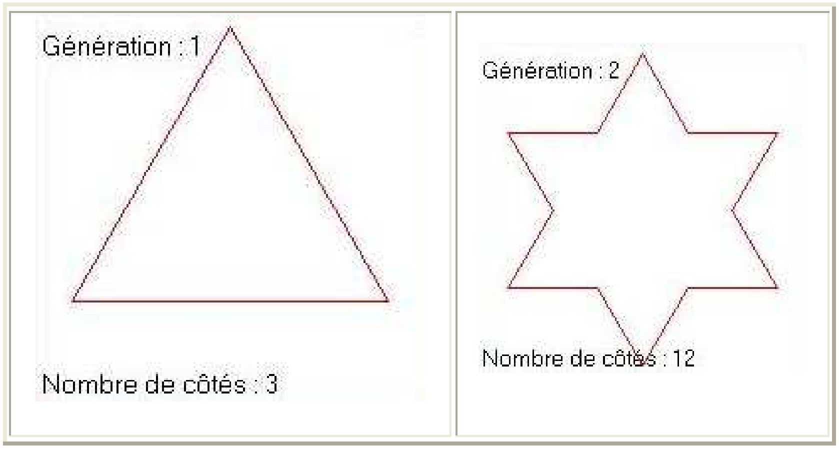
4. En déduire alors les équations des deux tangentes communes aux deux courbes.

Exercice 5: (source : Manuel 1ereS ou autre …)

Cet exercice peut être proposé en activité d'introduction des suites. Il peut se faire en travail de groupe. Un logiciel de calcul formel peut aider à la réduction de certains calculs. Parmi les avantages de laisser cet exercice ouvert : tous les élèves peuvent débuter et chaque groupe proposera une formule différente (explicite ou par récurrence), qu'il sera intéressant de comparer lors de la synthèse.

Niels Fabian Helge von Koch est né le 25 janvier 1870 à Stockholm en Suède et mort le 11 mars 1924 dans cette même ville.

Nous allons nous intéresser à la figure qui porte son nom



F_0 F_1

On obtient un flocon de Von Koch en partant d'un triangle équilatéral (figure F_0) puis en partageant chaque segment de la figure en trois segments de même longueur et en remplaçant le segment central par deux côtés du triangle équilatéral construit sur ce segment central comme l'indique les figures successives ci-dessus.

1) Dessiner la figure F_2

2) On appelle P_n le périmètre de la figure F_n. Etudier la suite (P_n).

3) On appelle A_n l'aire de la figure F_n. Etudier la suite (A_n).

4) En utilisant le tableur ou un algorithme, conjecturer le comportement de ces deus suites pour des grandes valeurs de n.

Exercice6: (source : bulletin de l'APMEP n°473, Fabrice Lallemand)

Proposé en salle informatique en application du chapitre « Notion de dérivée ». Ici la consigne « faire faire les calculs au logiciel » dans la partie 2. oblige l'élève à expliciter son raisonnement en en détaillant les étapes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
   a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. On note *a*, *b* et *c* ses trois solutions, avec *a* < *b* < *c*.
   b) Tracer à l'écran la courbe représentative C_f de f .
   c) On note A, B et C les points de l'axe des abscisses d'abscisses respectives *a*, *b* et *c*.
   Placer les points A, B et C.
   Placer le point I de la courbe C_f, dont l'abscisse est celle du milieu du segment [AB], le point J dont l'abscisse est celle du milieu du segment [AC] et le point K dont l'abscisse est celle du milieu du segment [BC].

d) Tracer les tangentes à la courbe C_f en I, J et K (on pourra utiliser trois couleurs différentes). Que constatez-vous ? Rédiger une conjecture.

2. **Étude du cas général**

On se donne trois réels a , b et c quelconques. Soit $f : x \mapsto (x-a)(x-b)(x-c)$ définie sur $\mathbf{R}$. On note C_f la courbe représentative de *f* et A, B, C, I, J et K les points définis comme à la première partie.

a) Ouvrir une nouvelle session de Xcas et ajouter un écran de géométrie 2D.

Définir les trois réels a , b et c comme des paramètres variables de −5 à 5, en choisissant pour le dessin les mêmes valeurs qu'à la première partie.

Tracer la courbe C_f et les tangentes en I, J et K.

Faire varier a , b et c à l'aide des curseurs. La conjecture émise dans la première partie reste-t-elle valable ?

b) Sans faire de calcul, décrire la marche à suivre pour prouver que le point C appartient à la tangente en I.

c) Rédiger cette démonstration, en faisant faire à Xcas tous les calculs nécessaires.

Exercice 7: (source : Maths en jeans ou IREM Lyon)

Un exercice de recherche classique qui utilise la puissance de calcul de l'ordinateur (XCas donne en effet la valeur exacte de n! pour des valeurs bien plus grandes que la calculatrice).

Combien y a-t-il de 0 à la fin de n! ?

Exercice 8 : deux cercles et un carré (1)

Soit ABCD un carré de côté 1, C_1 est un cercle de centre E tangent à [AB] et à [AD] , et C_2 un cercle de centre F tangent à [CB], à [CD] et C_1. On note r le rayon de C_1.

Exprimer le rayon de C_2 en fonction r.

La somme des aires des disques contenus dans C_1 et C_2 peut-elle être égale à la moitié de l'aire du carré ?

Exercice 9 : deux cercles et un carré (2)

ABCD est un carré de côté 1 . Soit E un point de [AB], et C_1 le cercle de centre E passant par A de rayon r.

C_2 un cercle de centre F passant par C et tangent au cercle C_1 , où F est un point de [BC].

Exprimer le rayon de C_2 en fonction r.

Pour quelle(s) valeur(s) de r, la somme des aires des disques contenus dans C_1 et C_2 est-elle minimale ?