Corrigé du sujet n° 13

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(f(x)))$ qui vaut d'une part $f(x^2-2x+2)$ et d'autre part $f(x)^2-2f(x)+2$, soit

$$f(x^2-2x+2) = f(x)^2-2f(x)+2.$$

Pour $x=0$ cela donne :

$f(2) = f(0)^2-2f(0)+2$.

Pour $x=2$ cela donne :

$f(2) = f(2)^2-2f(2)+2$.

Autrement dit, $f(2)$ est solution de $T^2-3T+2=0$ soit 2 ou 1.

En revenant à $f(2) = f(0)^2-2f(0)+2$, on obtient dans le cas où $f(2)=2$ que $f(0)$ est solution de $2 = U^2-2U+2$ soit 2 ou 0.

On remarque que $f(0)=0$ est impossible, car $f(f(0)) = f(0) = 2$

Dans le cas où $f(2)=1$ on obtient que $f(0)$ est solution de $1 = U^2-2U+2$ soit $f(0)=1$.

Dans les deux cas $f(0) \in \{1;2\}$.