Complément proposé par Frédéric de Ligt à la solution du problème de la quinzaine numéro 13

On va montrer que la possibilité f(0) = 1 n'est pas possible.

On a f(0) = 1 seulement quand f(2) = 1 et alors f(1) = 2 car 2 = g(2) = f(f(2)) = f(1).
La fonction f est injective sur $]-\infty,1]$, en effet il ne peut en être autrement car si on avait $x<y\leq 1$ avec f(x) = f(y) alors on aurait g(x) = g(y) mais comme g est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ ceci est contradictoire.
Maintenant on utilise la propriété classique suivante (mais pas si évidente à démontrer) : si une fonction est continue et injective sur un intervalle alors elle est strictement monotone sur cet intervalle.
On applique ce résultat à la fonction f, que l'on a supposée continue, sur l'intervalle $]-\infty,1]$. La fonction f est donc strictement monotone sur $]-\infty,1]$. Comme on s'est placé dans l'hypothèse où f(0) = 1 et f(1) = 2 alors f ne peut être que strictement croissante sur $]-\infty,1]$.
En particulier si x<0 on a f(x) < f(0) = 1, et ensuite f(f(x)) = g(x) < f(1) = 2. Mais cette dernière inégalité n'est pas possible puisque pour x<0 on a que g(x) > 2.