

Exercice 1

On dispose de  $b$  boules blanches et  $n$  boules noires - au moins une de chaque -, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elles ne soit vide ; on note  $s$  le nombre de boules dans la première, et  $r$  celui de ces boules qui sont blanches. L'évènement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes choisie au hasard ; le but de l'exercice est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité  $p$  de tirer une boule blanche.

- 1/ Exprimer  $p$  en fonction de  $b, n, r$  et  $s$ .
- 2/ Dans cette question, l'on fixe la valeur de  $s$  ; comment choisir  $r$  pour augmenter  $p$  ?
- 3/ Résoudre l'exercice.
- 4/ Quelles généralisations proposez-vous en augmentant les nombres de couleurs et d'urnes ?

Problème

Ce problème traite des triangles  $ABC$  dits cartésiens, c'est à dire à cotés entiers  $BC = a$ ,  $CA = b$  et  $AB = c$  dont l'angle en  $A$  mesure  $\frac{2\pi}{3}$  radians. Sauf avis contraire  $ABC$  est supposé cartésien.

- 1/ Notant  $H$  son orthocentre orthogonalement projeté en  $(U, V, W)$  sur les trois cotés, déterminer les nombres rationnels parmi  $AU, BV, CW, HA, HB, HC, HU, HV, HW, AW, AV, BU, BW, CV$  et  $CU$ .
- 2/ Notant  $I$  son centre du cercle inscrit,  $J$  l'intersection de la bissectrice intérieure en  $A$  et des bissectrices extérieures en les autres sommets, et  $P, Q$  les intersections de la droite  $BC$  et des deux bissectrices en  $A$ , déterminer les nombres rationnels parmi  $PB, PC, QB, QC, AI, AJ, AP$  et  $AQ$ .
- 3/ On suppose désormais  $b$  et  $c$  premiers entre eux. Montrer que, quitte à échanger  $b$  et  $c$ ,  $a + b - c$  est multiple de 3 et  $a - b + c$  ne l'est pas.
- 4/ On pose  $\frac{a + b - c}{3c} = \frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Notant  $d$  le PGCD de  $p(3p + 2q)$  et de  $q(2p + q)$ , calculer  $a, b$  et  $c$  en fonction de  $p, q$  et  $d$ .
- 5/ Montrer que  $q$  n'est pas multiple de 3, puis que  $d = 1$ .
- 6/ En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit cartésien de cotés premiers entre eux puis, par des remarques géométriques, une caractérisation analogue des triangles à cotés entiers  $BC = a$ ,  $CA = b$  et  $AB = c$  premiers entre eux dont l'angle en  $A$  mesure  $\frac{\pi}{3}$  radians.

Exercice 2

Soient  $A, B, C$  trois points deux à deux distincts dans l'espace,  $(A)$  une sphère de centre  $A$  et de rayon  $r$ , et  $E$  l'ensemble des nombres  $R > 0$  tels qu'il existe une sphère  $(H)$  de centre  $H$  et de rayon  $R$  par rapport à laquelle les points  $B$  et  $C$  sont strictement extérieurs (c'est à dire par exemple tels que  $HB > R$ ), et les points de  $(A)$  strictement intérieurs.

- 1/ Dans cette question,  $B$  et  $C$  sont alignés et strictement extérieurs à  $(A)$ . Montrer que  $E$  est non vide et majoré. Calculer le plus petit de ses majorants en fonction des données.
- 2/ Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour  $E$  soit non vide et majoré.
- 3/ Calculer, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de  $E$ .