

Et si la calculatrice ne servait à rien ? (sujet n°16)



Et si la calculatrice ne servait à rien ? - publié le 16/05/2013
Sujet n°16 (facile)

• Enoncé

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :
 2012^{2012} et 2013^{2011}

Solution :

L'objectif est de montrer que $2012^{2012} > 2013^{2011}$.

$2012^{2012} > 2013^{2011} \Leftrightarrow \ln(2012^{2012}) > \ln(2013^{2011})$
puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2012 \times \ln 2012 - 2011 \times \ln 2013 &> 0 \\ \Leftrightarrow 2012 \times \ln 2012 - (2012 - 1) \times \ln(2012 + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2012 \times \ln 2012 - 2012 \times \ln(2012 + 1) + \ln(2012 + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2012 \times \ln\left(\frac{2012}{2012 + 1}\right) + \ln(2012 + 1) &> 0\end{aligned}$$

On pose (u_n) la suite définie par son terme général :

$$u_n = n \times \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(n+1),$$

pour tout entier naturel n strictement positif.

Montrer que $2012^{2012} > 2013^{2011}$ revient à montrer que $u_{12} > 0$.

- Le premier terme de cette suite est $u_1 = 1 \times \ln \frac{1}{2} + \ln 2 = 0$.

- On étudie la monotonie de cette suite.

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \times \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \ln(n+2) - n \times \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln(n+1)$$

$$u_{n+1} - u_n = n \times \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \ln(n+2) - n \times \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln(n+1)$$

$$u_{n+1} - u_n = n \times \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - n \times \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2} \times (n+2)\right) - \ln(n+1)$$

$$u_{n+1} - u_n = n \times \ln\left(\frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n}\right) + 0$$

$$u_{n+1} - u_n = n \times \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)$$

$1 + \frac{1}{n^2 + 2n} > 1$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right) > 0$ puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Vu que n est un entier strictement positif, on obtient alors $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ce qui signifie que **la suite (u_n) est strictement croissante** pour tout entier naturel n strictement positif.

Comme $u_1 = 0$, on en déduit que $u_{12} > 0$.

Cyril GUILLON