Proposition de correction du sujet nº 13 : « Devinez les valeurs ! »

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$f(f(x)) = x^2 - 2x + 2 \qquad (\star).$$

Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

La forme de $(\star)$ incite à itérer une fois de plus, et on cherchera des éventuels points fixes pour ces itérées de f.

On notera pour plus de lisibilité $g = f \circ f$. Il est évident que $g \circ f = f \circ g$.

En étudiant $g(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, on remarque tout d'abord que g possède exactement deux points fixes : 1 et 2. En outre, g ne s'annule pas en 0, donc $f(0)$ ne peut être nul.

De plus, si f possède un point fixe x_0, alors c'est nécéssairement un point fixe de g puisqu'alors

$$g(x_0) = f \circ f(x_0) = f(x_0) = x_0$$

Par exemple, 0 ne peut être un point fixe de f, donc on retrouve $f(0) \neq 0$.

Maintenant, si x_1 est un point fixe de g, puisque f et g commutent, alors

$$g \circ f(x_1) = f \circ g(x_1) = f(x_1)$$

Donc $f(x_1)$ est un point fixe de g, donc égal à 1 ou à 2. On en déduit que $f(1) \in \{1;2\}$ et $f(2) \in \{1;2\}$.

De $(\star)$, on obtient pour tout réel x :

$$g \circ f(x) = f(x)^2 - 2f(x) + 2 = f \circ g(x)$$

Donc en particulier

$$g \circ f(0) = f(0)^2 - 2f(0) + 2 = f \circ g(0) = f(2)$$

Autrement dit

$$f(0)^2 - 2f(0) + 2 - f(2) = 0.$$

et par conséquent $f(0)$ est une racine du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 2 - f(2)$.

Il ne reste plus qu'à envisager ces racines en fonction de $f(2)$, sachant que $f(2) \in \{1;2\}$.

- **Si $\boldsymbol{f(2) = 1}$:**

  $f(0)$ est une racine du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1$, c'est à dire $\boldsymbol{f(0) = 1}$.

- **Si $\boldsymbol{f(2) = 2}$:**

  $f(0)$ est une racine du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}$, c'est à dire $\boldsymbol{f(0) = 2}$ puisque $f(0) \neq 0$.

Réciproquement, on peut vérfifer que $f(0) = 1 \Rightarrow f(1) = 2$, et que $f(0) = 2 \Rightarrow f(2) = 2$, ce qui est cohérent avec ce qui précède.

Finalement, les seules valeurs possibles pour $f(0)$ sont 1 ou 2, c'est-à-dire les points fixes de g.