

Corrigé du problème 12

La formule de transformation de somme en produit de cosinus conduit à :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) &= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Le problème posé équivaut à prouver que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

On prouve pour cela que ces deux nombres sont racines de la même équation bicarrée

$$\mathcal{E} : 16x^4 - 12x^2 + 1 = 0.$$

Pour trouver cette équation on pose $x = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}$. On prenant le carré de cette égalité, on a $16x^2 = 2(3+\sqrt{5})$ d'où $(16x^2 - 6)^2 = 4 \times 5$ ce qui après développement mène à l'équation $\mathcal{E}$. Un calcul élémentaire de résolution d'équation bicarrée conduit aux quatre racines suivantes :

$$\mathcal{R} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} \right\}.$$

Posons $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $b = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Pour prouver que a est solution de $\mathcal{E}$ on part de l'égalité $(e^{i\frac{\pi}{5}})^5 + 1 = 0$ ie $(a+ib)^5 + 1 = 0$. On développe via la formule du binôme de Newton $(a+ib)^5$ puis on prend la partie imaginaire de cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}b^5 - 10a^2b^3 + 5a^4b &= 0 \\ b^4 - 10a^2b^2 + 5a^4 &= 0 \\ (1-a^2)^2 - 10a^2(1-a^2) + 5a^4 &= 0 \\ 16a^4 - 12a^2 + 1 &= 0.\end{aligned}$$

a est donc solution de $\mathcal{E}$. De plus, $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Parmi les quatre racines de $\mathcal{E}$ seule $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}$ est supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a bien

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$