MATHEMATIQUES	**Terminale ES, L option maths** **Thème : La banque** **Comment fonctionne une banque ?**

LOIC CHAPELLIER
lp2i, Jaunay-Marigny

Premier temps :
Deuxième temps :
Troisième temps :

Pour les besoins des recherches à effectuer, il semble préférable d'avoir disposé la classe en îlots de 3 à 4 élèves.

Premier temps :

Intervention du professeur :

En quoi le choix de cette filière vous a motivé ?

Cette question doit interroger les élèves sur le lien entre l'économie et la filière ES.

Nous allons étudier le rôle de banque et l'intérêt des mathématiques pour expliquer ces différents fonctionnements.

Le professeur demande aux élèves de faire l'enquête demandée et recueille les réponses à l'aide d'un padlet crée à cet effet.

Enquête :
http://techniciencomptable.withme.us/t14-le-role-de-la-banque-dans-l-economie

Vos réponses seront notés dans ce padlet : ***adresse du padlet à écire!!***

1. Quelle est l'activité principale d'une banque ?
2. Quelle est la relation dépôt crédit ?
3. Quel est l'effet des banques sur l'utilisation des ressources ?

Comment les mathématiques peuvent apporter des solutions en économie ?

Bilan : diaporama

Le diaporama permet d'effectuer un bilan pour lancer l'étude. Il permet aussi de sensibiliser les élèves au problème de la crise économique et le rôle d'un établissement bancaire de ce type de problématique.

Le professeur peut alors rappeler les principales fonctions d'une banque :

- Gérer les moyens de paiement
- Assurer la sécurité des transactions financières
- Drainer l'épargne
- Proposer des crédits
- Intermédiaire sur les marchés financiers

https://www.lafinancepourtous.com/decryptages/marches-financiers/acteurs-de-la-finance/banque/la-banque-a-quoi-ca-sert/

Etude 1 :

Comment un dépôt fait par un client dans une banque peut-il entraîner de nombreux prêts ?
Diaporama

Un client qui dépose une certaine somme d'argent ne vient pas, en général, la réclamer immédiatement ; les retraits en liquide effectués ne concernent, en général, qu'une partie des sommes reçues en dépôt, certains placements induisent une durée minimale ; il est donc inutile que la banque dispose, en liquide, de l'ensemble des sommes reçues en dépôt, elle peut donc se permettre d'en prêter une partie

Si toutes les banques appliquaient, par exemple, un ratio de réserve de 10% (i.e. elles prêtent 90% des dépôts qu'elles reçoivent et gardent le solde en réserves), une injection de 100 euros de monnaie centrale par la BCE se traduira – au maximum – par une création monétaire totale de 1 000 euros.
http://ordrespontane.blogspot.fr/2011/03/reglementation-bancaire-et-consequences.html

Expliquez le deuxième paragraphe. Qu'en pensez-vous ? Faites des simulations.

Le professeur peut alors guider les recherches des élèves au moyen de la diapo 5 et construire avec eux la suite géométrique $u_{n+1}=0{,}9\,u_n$ ***.***

Bilan : diaporama : la Grèce

Cette activité constitue un bon exercice pour remettre en activité les élèves sur les suites. La suite observée est donc une suite géométrique dont les connaissances ont été vues en première. Les élèves doivent par ailleurs en calculer la somme des termes afin de déterminer la création monétaire totale. Le professeur peut alors institutionnaliser le cours sur la somme des termes d'une suite géométrique figurant au programme de TES/ L option maths.

L'objectif est de faire comprendre aux élèves qu'un placement de 400 000€ peut générer 4 000 000€ de création monétaire. Pour le constater, il est nécessaire d'aborder la notion de limite. Il est donc important d'utiliser un logiciel de programmation ou un tableur pour le faire conjecturer aux élèves. Ce travail permettra alors de faire émerger la notion de limite.

COURS : les suites géométriques, limites

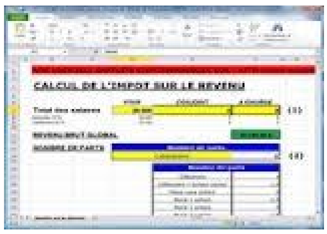
A l'issue du cours, il est conseillé de faire des exercices d'entraînement sur les suites et les limites.

Les algorithmes interviennent souvent en économie :

http://www.logitheque.com/logiciels/windows/comptabilite_gestion/calcul_impots/

Il n'est pas nécessaire de s'étendre sur le sujet le simple fait de montrer ce type de calculateur peut constituer un bon point d'appui pour dynamiser l'algorithmique dans ce type d'étude.
Les exercices suivants accompagnent donc judicieusement cette démarche car ils sont en lien avec les situations rencontrées dans le secteur bancaire.

Exercice 1:



On considère l'algorithme suivant :

S ← 1000
Pour K allant de 1 à N
    S ← S ×1,005 +30

Partie A :

Faire fonctionner cet algorithme pour N = 4. Donner la valeur de S obtenue à 10^{-1} près.

Partie B :

On place 1 000 € sur un livret qui rapporte 0,5 % par mois à intérêts composés. Chaque fin de mois, on y verse la somme de 30 €.

1. Vérifier qu'à la fin du premier mois, la somme présente sur le livret est égale à 1 035 €.
2. On désire acheter une voiture qui coûte 2850 €. Donner un algorithme qui permet d'afficher en sortie le nombre de mois nécessaires pour disposer de cette somme. Déterminer à l'aide de la calculatrice ce nombre.

Exercice 2 :

Soit la suite U de terme général U_n définie par $U_0=0$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$U_{n+1}=U_n+2(n+1)$$

.

1. Déterminer U_1, U_2 et U_3

2. Chacune des trois propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ?

Justifier les réponses.

- Proposition 1 : «La suite U est arithmétique.»
- Proposition 2 : «Il existe au moins une valeur de n pour laquelle $U_n=n^2+1$.»
- Proposition 3 : «Pour toutes les valeurs de n, on a $U_n=n^2+1$.»

3. On considère l'algorithme suivant :

```
P=0
Pour K allant de 0 à N :
        P ← P+K
Afficher P
```

a) Faire fonctionner cet algorithme avec $N=3$.

Obtient-on à l'affichage les valeurs des quatre premiers termes de la suite U ?

b) Modifier cet algorithme de manière à obtenir à l'affichage les valeurs des N premiers termes de la suite U.

Exercice 3 :

1. Pour sa naissance, en 2009, les grands-parents de Gabriel placent une somme de 1 500 € sur son livret d'épargne rémunéré à 2,25 %.
   a) Quelle somme Gabriel aura-t-il sur son livret d'épargne pour ses 15 ans ?
   b) En quelle année la somme initiale aura-t-elle doublée ?
2. On considère maintenant un placement de x euros en 2009 à un taux de t %.
   Écrire un algorithme permettant de déterminer en quelle année la somme initiale aura doublée.

Exercice 4 :

La croissance annuelle du PIB de la chine est de 9%. En 2009, le PIB de la chine était de 5000 milliards de dollars. Si ce taux de croissance se maintient, quel sera le PIB de la chine en 2015 ?

1) Répondre à cette question en modélisant le PIB de la chine par une suite.
2) On propose l'algorithme ci-dessous :

```
Pour K allant de 1 à N :
        U ← U+0,09U
Afficher U
```

Le PIB du Nigéria en 2008 s'élève à 200 milliards de dollars, avec une hypothèse d'un taux de croissance annuelle de 6% dans les années à venir.

a) Comment transformer cet algorithme pour entrer le taux T en pourcentage, puis effectuer le calcul de ce PIB prévu en 2015 ?

b) Calculer ce PIB en suivant cette hypothèse.

Deuxième temps :

Intervention du professeur :

Reprenons la réflexion établie en étude 1. Nous avons tenter de comprendre ce que génère un placement. Cependant, il convient de comprendre ce que rapporte un placement à un particulier.

Etude 2 : Les placements
Livret A: le taux a beau baisser, les Français y restent attachés

Le placement préféré des Français est bien parti pour le rester. Et ce, même si son rendement baisse. Depuis le 1er août le taux du livret A a été abaissé de 0,5 points, à 1,25%. Pourtant, selon un [sondage réalisé pour Ouest-France](), 48% des personnes interrogées prévoient de continuer, comme avant, à placer de l'argent sur ce livret. Les précédentes baisses du taux en 2003 (quand il était passé de 3% à 2,25%) en janvier 2013 (de 2,25 à 1,75) n'avaient pas non plus altéré l'attractivité du livret
http://www.latribune.fr/vos-finances/epargne/20130803trib000778879/livret-a-le-taux-a-beau-baisser-les-francais-y-restent-attaches.html

Les élèves peuvent suivre en autonomie la suite de questions proposées.

Intervention du professeur :

La situation étudiée ici reste aberrante car elle propose un taux d'intérêt à 50%. Il faut comprendre que les taux aujourd'hui ne dépasse pas 0,75% : ***https://www.service-public.fr/particuliers/actualites/A12243***
Cependant, pour mieux comprendre le fonctionnement, nous allons conserver ce taux.

Supposons qu'une personne ait pu placer en 1990 une somme d'argent rémunérée à 50% à intérêts composés. En janvier 2000, il dispose de 100€ sur ce compte.

Partie A :

Soit la suite qui donne la somme disponible sur le compte à l'année 2000 + n exprimée en milliers d'euros.

A) Déterminer u_0, u_1, u_2. Quelle la nature de la suite u ?
B) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n entier.
C) A l'aide d'un tableur, calculer les 11 premiers termes de la suite.

Cette première partie peut faire l'objet d'un bilan qui reprend les notions étudiées précedemment.

L'objectif des deux parties suivantes sera donc la construction de la fonction expontielle x --> $1{,}5^x$

Partie B :

1. De quelle somme disposerait-on en 1999 ? En 1998 ?

On note $f(n)$ la somme disponible sur le compte à l'année 2000 + n avec n un entier relatif. Par exemple, $f(-2)$ désigne la somme disponible à l'année 2000 – 2 c'est à dire à l'année 1998.

2. Déterminer $f(-1)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$
3. Exprimer $f(n)$ en fonction de n pour n entier relatif compris entre –10 et 10 à l'aide d'une puissance de 1,5.

Partie C :

Le taux d'évolution entre le début d'année et le milieu d'année est le même que le taux d'évolution entre le milieu d'année et la fin de l'année.

4. Expliquer la signification de l'écriture de $f(7{,}5)$.
5. Déterminer $f(7{,}5)$.

6. A l'aide d'un tableur déterminer $f(n)$ pour n allant de -10 à 10 par pas de 0,5.
7. A l'aide du tableur représenter le nuage de points obtenu.

Le professeur peut alors institutionnaliser les fonctions exponentielles de base a autour de cet exemple. Il pourra traiter en s'appuyant sur un document geogebra les différentes variations de ce type de fonction.
Il n'est pas nécessaire que tous les élèves aient abouti. La contruction de la courbe peut se faire en classe entière.

Cours : Les fonctions exponentielles de base a

Sur géogebra :

1. Créer un curseur a variant de 0 à 5 par pas de 1.
2. Construire la représentation graphique C_f de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a^x$.
3. Construire la tangente au point d'abscisse 0 de C_f .
4. Faites varier a et justifier qu'une seule valeur telle que $f'(0)=1$.
5. Déterminer une valeur approchée au centième de cette valeur.

Cours : La fonction exponentielle

Troisième temps :

Intervention du professeur :

Après avoir étudié les placements et ce qu'ils peuvent rapporter, nous allons nous intéresser à l'un des rôle essentiel d'une banque : l'emprunt.

Pour simplifier, nous ne parlerons pas ici de l'assurance du prêt(obligatoire en France pour les prêts immobiliers) que l'emprunteur doit souscrire lors de la demande d'un prêt.

Etude 3 : Comment se calculent les annuités d'un emprunt ?

On décide d'emprunter 50 000€ sur 10 ans et le taux annuel proposé par l'établissement bancaire est 3,5 %. Quel sera le montant de chaque mensualité, sachant qu'elles sont toutes égales ? (on ne prend pas d'assurance). Combien coûtera ce prêt ?

Enquête :

Sur Internet on trouve des sites de simulation qui fournissent des résultats.
Notamment, http://www.actufinance.fr/outils/simulateur-emprunt.html qui donne les renseignements suivants :

Capital emprunté	Calcul	?	50000.00
Taux annuel	Calcul	?	3.5 %
Périodicité			mensuelle
Périodes totales	Calcul	?	120
Assurance par échéance		?	0 %/cap
Date de départ (jj/mm/aaaa)			14/04/2011
Frais de dossier		?	0.00
Echéance	Calcul	?	494.43
Coût total		?	9331.60
Taux effectif global		?	3.49979 %

Tableau d'amortissement :
Le graphique
Tableau d'amortissement ?
effacer

Tableau d'amortissement

simulation remise à titre indicatif (sans valeur contractuelle)
Avertissement
les banques calculent leur tableau d'amortissement par journée et non par période égale dans l'année. Les chiffres suivants sont donc à quelques centimes près.

Prêt de 50000 sur 120 mensualités à 3.5 %

Période	Date	Intérêts	Assurance	Amortissement	Echéance	Restant dû
0	14/04/2011	0.00	0.00	0.00	0.00	50000.00
1	14/05/2011	145.83	0.00	348.60	494.43	49651.40
2	14/06/2011	144.82	0.00	349.61	494.43	49301.79
3	14/07/2011	143.80	0.00	350.63	494.43	48951.16
4	14/08/2011	142.77	0.00	351.66	494.43	48599.50
5	14/09/2011	141.75	0.00	352.68	494.43	48246.82
6	14/10/2011	140.72	0.00	353.71	494.43	47893.11
7	14/11/2011	139.69	0.00	354.74	494.43	47538.37
8	14/12/2011	138.65	0.00	355.78	494.43	47182.60
9	14/01/2012	137.62	0.00	356.81	494.43	46825.78
10	14/02/2012	136.58	0.00	357.85	494.43	46467.93
11	14/03/2012	135.53	0.00	358.90	494.43	46109.03
12	14/04/2012	134.48	0.00	359.94	494.43	45749.09
13	14/05/2012	133.43	0.00	360.99	494.43	45388.09
14	14/06/2012	132.38	0.00	362.05	494.43	45026.04
15	14/07/2012	131.33	0.00	363.10	494.43	44662.94
16	14/08/2012	130.27	0.00	364.16	494.43	44298.78
17	14/09/2012	129.20	0.00	365.22	494.43	43933.55

Cette collecte de renseignements amène à se poser différentes questions :

1. Que signifie assurance, amortissement….. ?
2. Comment comprendre les calculs qui sont faits ?
    c. Comment en connaissant un taux annuel, on calcule le taux mensuel ?
    d. Comment sont obtenues les valeurs du tableau d'amortissement ?
    e. Pourquoi les intérêts à rembourser diminuent-ils ?

On appelle R le remboursement mensuel, t le taux mensuel, C_n le capital restant dû pour la $n^{\text{ième}}$ période.

1. Justifier que $C_{n+1}=C_n\times(1+t)-R$.

Avec l'étude du tableau, les élèves aboutissent à cette relation.
Il est nécessaire de rappeler que le pourcentage du prêt n'a pas de rapport avec le taux d'intérêt pour un placement.
Le calcul de t doit nécessiter un travail au préalable qui peut être amené par l'étude du TCAM (taux de croissance annuel moyen) en économie.

Il faut faire comprendre aux élèves que si le taux du prêt est de 3,5%, alors le coefficient multiplicateur annuel est 1,035 puis $(1+t)^{12}=1{,}035$ ce qui donne $1+t\approx1{,}0028$. Ce résultat correspond à une augmentation tous les mois de 0,28% du capital restant dû.
Le professeur peut alors s'appuyer sur le programme de première avec le lien entre les pourcentages d'augmentation et les coefficients multplicateur.
Un travail conjoint entre le professeur de Mathématiques et le professeur d'économie peut alors être profitable pour les élèves. Les programmes des deux matières s'y prêtent bien.

Intervention du professeur :

Cette suite C_n est une suite arithmético géométrique. L'objectif est maintenant d'obtenir C_n en fonciton de n afin de pourvoir calculer directement nécessaire et ainsi pouvoir calculer au bout de combien de mois le prêt sera remboursé.
La suite des questions est donc construire pour pouvoir exprimer C_n en fonction de n

Le professeur pourra d'aillleurs appuyer ses propos par une simulation sur tableur.
L'aménagement des questions ainsi que l'ordre peut être modifié selon le professeur mais aussi les capacités et les réactions des élèves.

2. Résoudre l'équation $x=x(1+t)-R$. Appelons a la solution.
3. Montrer que la suite $u_n=C_n-a$. est une suite géométrique de raison $(1+t)$.
4. En déduire une expression de C_n .
5. Calculer le coût du prêt.

COURS : les suites arithmético-géométriques.

Exercice 6 :

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

N ← 0
U ← 10
Tant que $U\leqslant1000$
    N ← N+1
    U ← 2U – 5

Cet algorithme permet de calculer les termes d'une suite. Laquelle ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=2u_n-5$ et, $u_0=10$ pour tout nombre entier naturel n,.

Calculer u_1 et u_2.

Démontrer en réutilisant la méthode vue dans l'étude 2, que pour tout n, $u_n=5\times 2^n+5$.

Partie C :

1- On cherche la plus petite valeur n_0 de n telle que $u_n>1000$.
Expliquer comment modifier l'algorithme de la partie A pour obtenir cette valeur n_0.

Déterminer cette valeur n_0.