Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2009 - groupement B
Éléments de correction

Exercice 1 :

A. Résolution d'une équation différentielle

1. L'équation caractéristique de (E_0) est
$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$
équation qui s'écrit $(r-1)^2 = 0$. Elle admet alors une racine double $r = 1$.
Les solutions sont alors les fonctions de la forme
$$f(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}$$

2. En dérivant à l'aide du produit, on a
$$\begin{aligned} h'(x) &= 4\left[2x\mathrm{e}^x + x^2 \times (e^x)\right] \\ &= 4(2x + x^2)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$
De même, on a
$$\begin{aligned} h''(x) &= 4\left[(2+2x)\mathrm{e}^x + (2x + x^2)\mathrm{e}^x\right] \\ &= 4(x^2 + 4x + 2)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$
En remplaçant,
$$\begin{aligned} h''(x) - 2h(x) + h(x) &= 4(x^2 + 4x + 2)\mathrm{e}^x - 2 \times 4(2x + x^2)\mathrm{e}^x + 4x^2\mathrm{e}^x \\ &= (4x^2 - 8x^2 + 4x^2 + 16x - 16x + 8)\mathrm{e}^x \\ &= 8\mathrm{e}^x \end{aligned}$$
La fonction h est alors une solution particulière de l'équation (E).

3. Les solutions générales s'obtiennent en ajoutant une solution particulière avec la solution générale de l'équation homogène. On obtient alors
$$\begin{aligned} f(x) &= (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x + h(x) \\ &= (4x^2 + \lambda x + \mu)\mathrm{e}^x \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.} \end{aligned}$$

4. On veut $f(0) = -4$ d'où $\mu = -4$.
On a alors $f(x) = (4x^2 + \lambda x - 4)\mathrm{e}^x$.
En dérivant à l'aide du produit, on obtient :
$$f'(x) = (8x + \lambda)\mathrm{e}^x + (4x^2 + \lambda x - 4)\mathrm{e}^x$$
d'où $f'(0) = \lambda - 4$. Or $f'(0) = -4$ alors $\lambda - 4 = -4$ donc $\lambda = 0$.
La solution particulière est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (4x^2 - 4)\mathrm{e}^x$$

B. Étude locale d'une fonction

1. (a) À l'aide de la question précédente, on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x + 4x^2 - 4)\mathrm{e}^x \\ &= 4(x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

(b) La tangente à la courbe C est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si on a $f'(x) = 0$, ce qui équivaut à $x^2 + 2x - 1 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 8$. Les solutions sont alors
$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,41 \quad \text{et} \quad x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41$$

2. (a) Le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction exponentielle est :
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$
Afin d'obtenir le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f, il faut multiplier ce développement par $(4x^2 - 4)$ et ne garder que les termes de degré inférieur ou égal à 2. On obtient
$$f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + +x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$
(b) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est donnée par la partie affine de ce développement limité, alors T a pour équation $y = -4 - 4x$.
(c) Pour étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0, il faut étudier le signe de la différence
$$f(x) - (-4 - 4x) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x),$$
expression du signe de $2x^2$ au voisinage de 0. Or $x^2 \geqslant 0$, cela signifie que la courbe est au dessus de la tangente T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1. Comme f est solution de (E), on a
$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 8\mathrm{e}^x$$
d'où
$$f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8\mathrm{e}^x$$
Une primitive de f'' est f', une primitive de f' est f et une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Par conséquent, une primitive de la fonction f est
$$\begin{aligned} F(x) &= -f'(x) + 2f(x) + 8\mathrm{e}^x \\ &= -4(x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^x + 2(4x^2 - 4)\mathrm{e}^x + 8\mathrm{e}^x \\ &= (4x^2 - 8x + 4)\mathrm{e}^x \\ &= 4(x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

2. (a) $f(x)$ est du signe de $4x^2 - 4$, expression qui est négative pour $x \in [0\,;\,1]$. Alors l'aire du domaine demandé est alors
$$\begin{aligned} A &= -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -[F(x)]_0^1 \\ &= F(0) - F(1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

A. Loi normale

1. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 10 alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 120}{10}$ suit la loi normale centrée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. On a donc :
$$\begin{aligned} P(110 \leqslant X \leqslant 130) &= P\left(\frac{110-120}{10} \leqslant T \leqslant \frac{130-120}{10}\right) \\ &= P(-1 \leqslant T \leqslant 1) \\ &= \Pi(1) - \Pi(-1) \\ &= \Pi(1) - [1 - \Pi(1)] \\ &= 2\Pi(1) - 1 \\ &\approx 0,683 \end{aligned}$$

2. On demande $P(X \leqslant 100)$.

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 100) &= P\left(T \leqslant \frac{100-120}{10}\right) \\
&= P(T \leqslant -2) \\
&= \Pi(-2) \\
&= 1-\Pi(2) \\
&\approx 0,023
\end{aligned}$$

B. Loi de Poisson

1. On demande

$$\begin{aligned}
p(A) &= p(Y=0) \\
&\approx 0,007
\end{aligned}$$

2. On demande

$$\begin{aligned}
p(B) &= p(Y \leqslant 4) \\
&= p(Y=0)+p(Y=1)+p(Y=2)+p(Y=3)+p(Y=4) \\
&\approx 0,441
\end{aligned}$$

C. Loi binomiale

1. – Chaque prélèvement est constitué de 10 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise ;
   – Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
     – soit le succès : l'évènement E, le camion-benne n'a pas de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier, de probabilité $p = p(E) = 0,9$,
     – soit l'échec : l'évènement $\overline{E}$, le camion-benne a eu une panne ou un sinistre pendant le premier mois du chantier, de probabilité $q = 1-p = 0,1$;
   – La variable aléatoire Z mesure le nombre de succès,

   alors la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,9$.
2. On demande

$$\begin{aligned}
p(Z=10) &= \mathrm{C}_{10}^{10}\, 0,9^{10} \times 0,1^{0} \\
&= 0,9^{10} \\
&\approx 0,349
\end{aligned}$$

D. Test d'hypothèse

1. La règle de décision permettant d'utiliser ce test est la suivante : on prélève un échantillon aléatoire de 100 fers, on mesure le diamètre des fers et on calcule la moyenne m de ces diamètres :
   – Si $m \in [24,964\,;\ 25,039]$, on accepte l'hypothèse H_0 et on rejette H_1 : la livraison est conforme pour le diamètre, au seuil de 5%.
   – Si $m \notin [24,964\,;\ 25,039]$, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte H_1 : la livraison n'est pas conforme pour le diamètre, au seuil de 5%.
2. Ici $\overline{x} = 24,978$ donc $\overline{x} \in [24,964\,;\ 25,039]$: la livraison est conforme pour le diamètre, au seuil de 5%.

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr