Une identité cachée - publié le 10/04/2012 mis à jour le 14/04/2012

Sujet n°15

On considère la fraction suivante : $\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1330}+\frac{1}{1331}$.

Montrer que a est divisible par 1997

Soit $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{1331}$

1) Commençons par faire disparaitre les signes – et les petits points...

   $S=\sum_{k=1}^{1331}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{665}\frac{1}{2k}=\sum_{k=666}^{1331}\frac{1}{k}$

2) Regroupons par paire cette somme de 666 termes

   $S=\sum_{k=1}^{333}\frac{1}{665+k}+\frac{1}{1332-k}=\sum_{k=1}^{333}\frac{1997}{(665+k)(1332-k)}=1997\times\frac{a'}{b'}$

   où $\frac{a'}{b'}$ est la fraction obtenue en mettant $\frac{1}{666\times1331}+\frac{1}{667\times1330}+\ldots+\frac{1}{998\times999}$ au même dénominateur

3) Assurons nous qu'il n'y a pas de simplification superflue

   Comme b' est le produit des nombres entiers compris entre 666 et 1331 et que 1997 est un nombre premier, on peut être certain que b' n'est pas multiple de 1997.

4) Concluons: la somme S peut s'écrire $\frac{a}{b}$ avec a nécessairement multiple de 1997.

5) Peut on généraliser ce problème pour l'adapter à une année plus récente (qui soit un nombre premier)?

   On remarque que le terme central de la somme de départ (notons le -1/N) détermine l'année cherchée sous la forme 3N-1.

   Par exemple $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ s'écrit $\frac{a}{b}$ avec a multiple de $3\times2-1=5$

   Il faudrait donc trouver un nombre premier de la forme 3N-1 plus proche de l'an 2012:

   $2003=3\times668-1$ fonctionnerait avec $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{1335}$

   1999,2011,2017 non

   $2027=3\times676-1$ fonctionnerait avec $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{1351}$

   2029, non 2039 oui, 2053 non etc....

   Rendez vous donc en 2027 pour une version actualisée de ce problème!