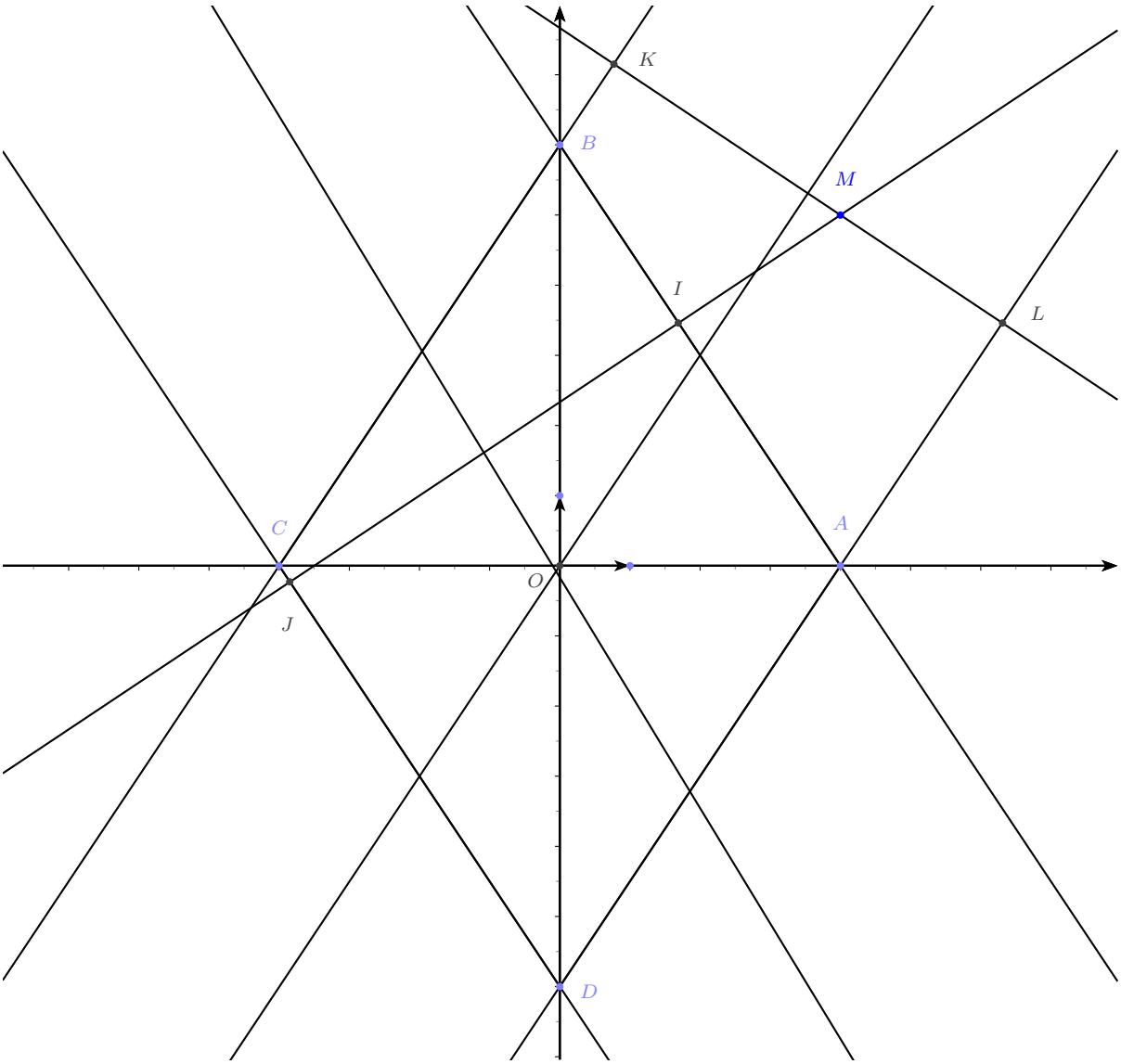
Corrigé du sujet n° 3

On choisit le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, comme la figure ci-dessous



Les coordonnées des sommets du losange sont : $A(a;0)$, $B(0;b)$, $C(-a;0)$ et $D(0;-b)$ avec a, b deux réels strictement positifs.
Soit $M(x;y)$ un point quelconque du plan, et I, J, K, L ses projections orthogonales sur les côtés $(AB), (CD), (CB)$ et (AD) du losange.
La médiatrice de $[IJ]$ est la droite passant par O et parallèle à (AB) ; donc $OI = OJ$.
La médiatrice de $[KL]$ est la droite passant par O et parallèle à (CB) ; donc $OK = OL$.
Les points I, J, K, L sont cocycliques si et seulement si $OI = OK$.
La droite (AB) a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.
Comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-a;b)$, alors le vecteur $\overrightarrow{MI}$ a pour coordonnées $(\alpha b;\alpha a)$, car les deux vecteurs sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{OI} = \alpha(b\,\overrightarrow{\imath} + a\,\overrightarrow{\jmath}) + \overrightarrow{OM}$. Or le point

I appartient à la droite (AB), donc $\dfrac{\alpha b + x}{a} + \dfrac{\alpha a + y}{b} = 1$, d'où $\alpha = \dfrac{ab - bx - ay)}{a^2 + b^2}$. après un calcul simple, on obtient :
$\overrightarrow{OI} = \dfrac{a(b^2 - by + ax)}{a^2 + b^2}\overrightarrow{i} + \dfrac{b(a^2 + by - ax)}{a^2 + b^2}\overrightarrow{j}$ et $OI^2 = \dfrac{(ax - by)^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2}$.
Pour calculer la distance OK^2, il suffit de remplacer a par $-a$ dans le calcul précédent, c'est-à-dire $OK^2 = \dfrac{(ax + by)^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2}$. On a donc :

$$\begin{array}{rr} & OI = OK \\ \Leftrightarrow & OI^2 = OK^2 \\ \Leftrightarrow & OK^2 - OI^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{4abxy}{a^2 + b^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \ ou \ y = 0 \end{array}$$

Ainsi, les points I, J, K et$L$ sont cocycliques si et seulement si M est situé sur l'une des diagonale du losange.