SUJET 2 philippe.lefeuvre@ac-poitiers.fr

On appelle nombre triangulaire tout nombre de la forme $\frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$.
On considère la somme suivante :

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2023066}},$$

où les dénominateurs sont constitués des sommes partielles des inverses de ces nombres.
Démontrez que $S > 1008$.

On peut remarquer que $\frac{n(n+1)}{2}=2023066$ pour $n=2011$.

Notons d_n le énième dénominateur de S. $d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$, or $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, ainsi $d_n=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ et $d_n=\frac{2n}{n+1}$.

On a donc : $S\equiv\sum_{n=1}^{2011}\frac{1}{d_n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2011}\frac{1+n}{n}$, d'où $2S=2011+\sum_{n=1}^{2011}\frac{1}{n}$.

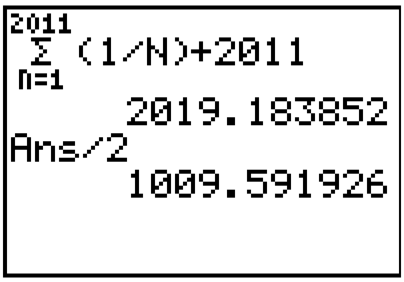
Si $x\in[n;n+1]$, $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}$ donc $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}$.

Ainsi $\int_1^{2012}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{2011}\frac{1}{n}$, on en déduit que : $2S\geqslant2011+\ln(2012)$.

Par conséquent : $S\geqslant\frac{2011+\ln(2012)}{2}>1009$.

Remarque: une calculatrice de type lycée donne une valeur approchée de S :

TI 84+



Casio 35+