<u>Une étrange caractérisation pour un triangle</u> (Sujet n° 6)

<u>Énoncé :</u>

Que peut-on dire d'un triangle dont les angles vérifient la relation suivante : $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 2$?

<u>Solution</u> :

On utilisera les relations :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

• Soit un triangle dont les angles α, β et γ vérifient $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 2$

Puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout x, on a $\dfrac{1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 2$

Ce qui donne $3 = 3(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$

On a alors $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2\gamma$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2(\pi - (\alpha + \beta))$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2(\alpha + \beta)$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta = 2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha(1 - \sin^2\beta) + \cos^2\beta(1 - \sin^2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\beta\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha = 0$$
$$\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha = 0$$
$$\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 0$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) = 0$$

On en déduit que $\cos\alpha = 0$ ou $\cos\beta = 0$ ou $\cos(\alpha + \beta) = 0$

Donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Le triangle a donc un angle droit : il est donc rectangle.

• Réciproquement, supposons que le triangle soit rectangle et notons $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

On a alors $\beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ et $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \beta$, ce qui donne $L = \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\beta + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\cos^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\beta + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}$

Puisque $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, on obtient $L = \dfrac{1 + \sin^2\beta + \cos^2\beta}{0 + \cos^2\beta + \sin^2\beta} = 2$

■

On vient de montrer le résultat suivant :

Un triangle (d'angle α, β, γ) est rectangle si et seulement si $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 2$

Olivier Rochoir