<u>Un peu de probabilité</u> (Sujet n° 3)

<u>Énoncé</u> :

On lance une pièce parfaitement équilibrée jusqu'à obtenir "Face" deux fois de suite. Combien de lancers en moyenne va-t-on effectuer ?

<u>Solution</u> :

Pour commencer un petit programme en Python pour estimer la valeur du résultat :

```
def sujet3(nb=1000):
	i=1
	moyenne=0
	while i <= nb:
		c=0
		gagne = 0
		deja_un_face = 0
		while gagne == 0:
			c += 1
			piece = random.randint(1, 2)
			#piece =1 face et piece =2 pile
			if piece == 1 and deja_un_face == 1:
				gagne = 1 #cela signifie qu'on a deux faces de suites.
			if piece == 1 and deja_un_face == 0:
				deja_un_face = 1 #on a eu un face et on n'en avait pas avant
			if piece == 2:
				deja_un_face = 0 #on a eu un pile et on n'annule le face précédent
		moyenne = ((i - 1) * moyenne + c) / i
		i +=1
	print(moyenne)
	os.system("pause")

import random
import os

sujet3(1000000)
```

En exécutant ce programme, on trouve une moyenne (pour 1 million d'essais) de 6,005089….
On va donc supposer que le nombre moyen de lancers est **6**.

☞ Pour lever cette incertitude, une petite preuve mathématique maintenant !

D'abord <u>quelques notations</u> :

Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la première fois deux faces consécutives, F_i l'événement « On obtient face au i$^{\text{ème}}$ lancer ». $\overline{F_i}$ sera donc l'événement « On obtient pile au i$^{\text{ème}}$ lancer ». On a alors $p(F_i) = p(\overline{F_i}) = \frac{1}{2}$ et $p_n = p(X = n)$ pour n entier non nul.

On a alors :

• $(X = 2) = F_1 \cap F_2$: Pour obtenir 2 faces avec 2 lancers, il faut un face au 1$^{\text{er}}$ lancer et un face au second. Donc $p_2 = \frac{1}{4}$.

• $(X = 3) = \overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3$: Pour obtenir 2 faces avec 3 lancers, il ne faut pas deux faces dans les deux premiers lancers sinon on est dans le cas X = 2.
Donc $p_3 = \frac{1}{8}$.
Pour simplifier l'écriture, on ne notera plus dorénavant les $\cap$.
• $(X = 4) = F_1 \overline{F_2} F_3 F_4 \cup \overline{F_1} \overline{F_2} F_3 F_4$. Donc $p_4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$.
• $(X = 5) = \overline{F_1} \overline{F_2} \overline{F_3} F_4 F_5 \cup \overline{F_1} F_2 \overline{F_3} F_4 F_5 \cup F_1 \overline{F_2} \overline{F_3} F_4 F_5$. Donc $p_5 = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$.
• $(X = 6) = \overline{F_1} \overline{F_2} \overline{F_3} \overline{F_4} F_5 F_6 \cup \overline{F_1} \overline{F_2} F_3 \overline{F_4} F_5 F_6 \cup \overline{F_1} F_2 \overline{F_3} \overline{F_4} F_5 F_6 \cup$
$F_1 \overline{F_2} \overline{F_3} \overline{F_4} F_5 F_6 \cup F_1 \overline{F_2} F_3 \overline{F_4} F_5 F_6$. Donc $p_5 = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{5}{64}$

☞ Comment obtient-on (X = n) ?
Si on a $\overline{F_1}$: (c'est-à-dire le premier lancer est un pile avec une probabilité de $\frac{1}{2}$)
Le deuxième lancer peut-être soit un pile soit un face cela n'a pas d'importance. Donc la suite des lancers correspond à (X = n – 1)
Si on a F_1 : (c'est-à-dire le premier lancer est un face avec une probabilité de $\frac{1}{2}$)
Le deuxième lancer doit être un pile (donc F_2 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$) et la suite des lancers correspond à (X = n – 2).
En résumé, on a $p(X = n) = p(\overline{F_1}) \times p(X = n/ \overline{F_1}) + p(F_1) \times p(X = n/ F_1)$.
$p(X = n) = p(\overline{F_1}) \times p(X = n - 1) + p(F_1) \times p(\overline{F_2}) \times p(X = n - 2)$
D'où $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times p_{n-2}$

☞ On obtient alors une suite récurrente d'ordre 2 à résoudre : $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n-2}$.
L'équation caractéristique de cette suite est $r^2 = \frac{1}{2} r + \frac{1}{4}$ dont les solutions sont $r' = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $r'' = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$.
Donc $p_n = A\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n + B\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^n$.
On détermine A et B en utilisant $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{4}$. On trouve $A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$ et $B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$.
☞ Le nombre moyen de lancers est donné par l'espérance E(X) de la variable X.
On a $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = A \sum_{n=1}^{+\infty} nr'^n + B \sum_{n=1}^{+\infty} nr''^n$.
On a |r| < 1, les séries sont donc convergentes. Il s'agit d'une série dérivée.
$E(X) = Ar' \sum_{n=1}^{+\infty} nr'^{n-1} + Br'' \sum_{n=1}^{+\infty} nr''^{n-1}$.
Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}$, on a, en dérivant, $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1 - r)^2}$.
Donc $E(x) = A\frac{r'}{(1 - r')^2} + B \frac{r''}{(1 - r'')^2}$
En remplaçant A, B, r' et r'' par les valeurs trouvées précédemment, on obtient **E(X) = 6**.
Autrement dit : **le nombre moyen de lancers est 6.**

Olivier Rochoir