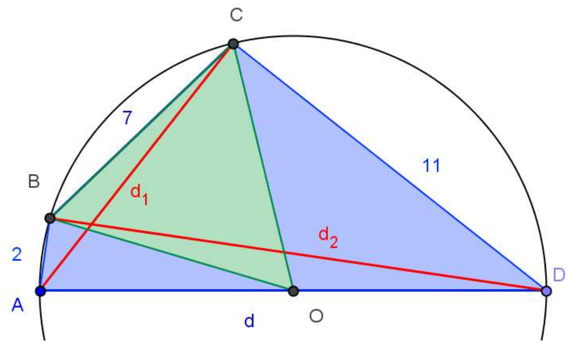
<u>Six points sur un cercle</u> (Sujet n°2)

<u>Énoncé</u> :

On considère six points situés sur un cercle de rayon R. Les longueurs des segments qui joignent deux points consécutifs mesurent 2 ; 7 et 11. Chaque mesure est utilisée deux fois. Calculer le rayon du cercle.

<u>Solution</u> :



Chaque mesure étant utilisée deux fois, on obtient la figure ci-contre :

On note d le diamètre de ce demi-cercle, et d_1 et d_2 les diagonales du quadrilatère ABCD.

Pour éviter l'usage de la trigonométrie, on va utiliser le théorème de Ptolémée :

« **Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.** »

On a ainsi $d_1 d_2 = 7d + 2\times 11$
De plus [AD] étant le diamètre du cercle et B un point du cercle, le triangle BAD est rectangle en B et le théorème de Pythagore donne $d^2 = d_2^2 + 2^2$.
De même, avec le triangle ACD, on obtient $d^2 = d_1^2 + 11^2$.

On a alors un système de trois équations à trois inconnues à résoudre : $\begin{cases} ① \ d_1 d_2 = 7d + 22 \\ ② \ d_2^2 = d^2 - 4 \\ ③ \ d_1^2 = d^2 - 121 \end{cases}$

L'équation ① mise au carrée donne $d_1^2 d_2^2 = (7d + 22)^2$ et en remplaçant d_1^2 et d_2^2 à l'aide des équations ② et ③, on obtient l'équation $(d^2 - 4)(d^2 - 121) = (7d + 22)^2$.
Cette équation donne $d^4 - 125d^2 + 484 = 49d^2 + 308d + 484$ ou encore $d^4 - 174d^2 - 308d = 0$
On peut mettre d en facteur (et même simplifier par d car d = 0 ne peut être solution) :
$d^3 - 174d - 308 = 0$
Il reste à résoudre cette équation du 3$^{\text{ème}}$ degré. Une étude de la fonction montre qu'il n'y a qu'une seule solution comprise entre 0 et 20 (le diamètre d positif ne peut être supérieur à 2+7+11).
En cherchant une valeur approchée de la solution (ou à l'aide d'un tableau de valeurs), on s'aperçoit que d = 14. On a en effet : $14^3 - 174\times 14 = 308$.

On en déduit que **le rayon vaut 7**.

Olivier Rochoir