PROBLEME DE LA QUINZAINE 2

Posons $T_1 = 1$ et $T_n = T_{n-1} + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi T_n n'est autre que le nombre triangulaire de rang n et donc la somme des n premiers entiers naturels, avec $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On a donc:

$$S = \sum_{p=1}^{2011} \frac{1}{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{T_k}} = \sum_{p=1}^{2011} \frac{1}{\sum_{k=1}^{p} \frac{2}{k(k+1)}} = \sum_{p=1}^{2011} \frac{1}{2 - \frac{2}{p+1}} = \sum_{p=1}^{2011} \frac{p+1}{2p}$$

Par suite, il vient que:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2011} \frac{p+1}{p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2011} 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}(2011 + \sum_{p=1}^{2011} \frac{1}{p}) = 1005,5 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2011} \frac{1}{p}$$

- ***Variante 1***
  Comme de plus:

$$\sum_{p=1}^{2011} \frac{1}{p} > \int_1^{2012} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \ln 2012$$

  On en déduit que $S > 1005,5 + \frac{1}{2} \ln 2012 > 1009$ et à fortiori $S > 1008$

- ***Variante 2***
  Or la suite

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

  est strictement croissante donc:

$$\sum_{p=1}^{2011} \frac{1}{p} > \sum_{p=1}^{83} \frac{1}{p}$$

  Par suite, il vient que:

$$S > 1005,5 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{83} \frac{1}{p} > 1008$$

- ***Variante 3***
  A l'aide d'un logiciel de calcul formel (de type Xcas) on obtient:
  $S \approx 1005,5 + \frac{8,18385166659}{2}$
  Ainsi, $S > 1009$ et à fortiori $S > 1008$