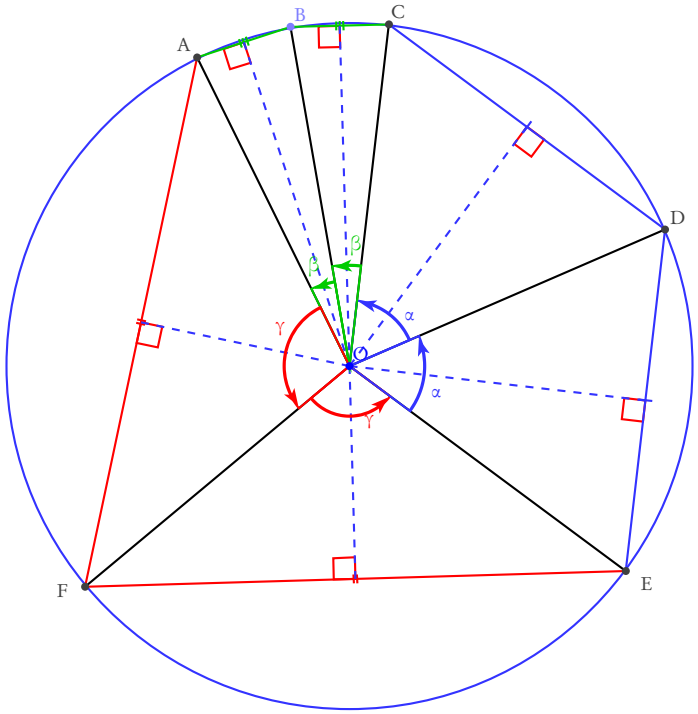
Énoncé du problème

On considère six points situés sur un cercle de rayon R. Les longueurs des segments qui joignent deux points consécutifs mesurent 2 ;7 et 11. Chaque mesure est utilisée deux fois. Calculer le rayon du cercle.

Solution



Nommons :

- $\alpha \in [0\,;\,\pi]$ la mesure de l'angle au centre interceptant une corde de mesure 5,
- $\beta \in [0\,;\,\pi]$ la mesure de l'angle au centre interceptant une corde de mesure 2,
- $\gamma \in [0\,;\,\pi]$ la mesure de l'angle au centre interceptant une corde de mesure 11.

Le rayon du cercle vérifie les égalités :

$$R = \frac{7}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{11}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$$

De plus : $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. On a donc : $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} - \sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$

Si on pose $x = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, $y = \sin\dfrac{\beta}{2}$ et $z = \sin\dfrac{\gamma}{2}$, étant donnés que ces trois réels sont nécessairement positifs, on a le système d'équations :

$$\begin{cases} y &= \dfrac{2}{7}x \\ z &= \dfrac{11}{7}x \\ x &= \sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} - yz \end{cases}$$

En substituant à y et z dans la dernière équation, les valeurs exprimées dans les deux premières équations, on obtient :

$$(x+yz)^2 = 1-y^2-z^2+y^2z^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2+2xyz-1=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{44}{49}x^3+\frac{174}{49}x^2-1=0$$

On peut vérifier que cette équation du 3e degré admet $\dfrac{1}{2}$ pour solution, car : $\dfrac{44}{8}+\dfrac{174}{4} = \dfrac{11+87}{2} = 49$. Les deux autres solutions s'obtiennnent à l'aide de la factorisation : $44x^3+174x^2-49 = (x-0,5)(44x^2+196x+98)$. Les deux racines du facteur du second degré sont réelles de même signe négatif, car leur produit est le nombre positif $\dfrac{98}{44}$, et leur somme est le nombre négatif $-\dfrac{196}{44}$. Finalement, la seule solution convenable est $\dfrac{1}{2}$ avec laquelle on obtient :

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ et } R = 7}$$