1 Énoncé du problème :

Étant donné 3 nombres entiers x,y et z tels que leur somme $x+y+z$ divise la somme des carrés $x^2+y^2+z^2$, quels sont les autres exposants entiers n tels que $x+x+z$ divise $x^n+y^n+z^n$?

2 Solution.

Pour répondre à cette question nous allons utiliser les formules de Newton, dans l'anneau de polynômes à k indéterminées $A[X_1,X_2,\ldots,X_k]$. Ces formules permettent d'exprimer par récurrence, les polynômes homogènes symétriques $S_n = \sum_{i=1}^{k} X_i^n$ de degré n quelconque, en fonction des k polynômes symétriques élémentaires de degré $l \in [\![1;k]\!]$: $\sigma_l = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_j\leqslant k} X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_l}$.

Redémontrons ces formules pour les 3 indéterminées : $X_1 = X$; $X_2 = Y$ et $X_3 = Z$. Dans ce cas particulier on peut poser : $S_n = X^n+Y^n+Z^n$; $\sigma_1 = S_1 = X+Y+Z$; $\sigma_2 = XY+XZ+YZ$ et $\sigma_3 = XYZ$. Dans l'anneau $A[X,Y,Z][T]$, posons $P[T] = (T-X)(T-Y)(T-Z) = T^3-\sigma_1T^2+\sigma_2T-\sigma_3$. Pour tout entier $n \geqslant 3$ on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lllll} P(X)=0 & \Rightarrow & X^3=\sigma_1X^2-\sigma_2X+\sigma_3 & \Rightarrow & X^n=\sigma_1X^{n-1}-\sigma_2X^{n-2}+\sigma_3X^{n-3} \\ P(Y)=0 & \Rightarrow & Y^3=\sigma_1Y^2-\sigma_2Y+\sigma_3 & \Rightarrow & Y^n=\sigma_1Y^{n-1}-\sigma_2Y^{n-2}+\sigma_3Y^{n-3} \\ P(Z)=0 & \Rightarrow & Z^3=\sigma_1Z^2-\sigma_2Z+\sigma_3 & \Rightarrow & X^n=\sigma_1Z^{n-1}-\sigma_2Z^{n-2}+\sigma_3Z^{n-3} \end{array}\right.$$

Par addition membres à membres on obtient la formule de récurrence : $\boxed{S_n = \sigma_1S_{n-1}-\sigma_2S_{n-2}+\sigma_3S_{n-3}}$ (1)

Ces calculs formels faits dans un anneau de polynômes quelconques, peuvent être reproduits à l'identique en supposant à partir de maintenant que X, Y et Z sont des nombres entiers (il peut même s'agir d'entiers relatifs !).
Si on suppose que $(X+Y+Z) \mid (X^2+Y^2+Z^2)$, cela signifie qu'il existe un entier k tel que : $S_2 = k\sigma_1$.
Or : $S_2 = \sigma_1^2-2\sigma_2$; d'où : $2\sigma_2 = \sigma_1^2-k\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_1-k)$.

σ_1 divise donc $2\sigma_2$, pour conclure, nous devons alors considérer 2 cas de figure :

- σ_1 impair : on en déduit que c'est un diviseur de σ_2. La formule de récurrence (1) permet alors d'affirmer que si σ_1 divise S_{n-3}, alors σ_1 divise S_n.
- σ_1 pair : S_n est pair pour tout n, étant donné que dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'élévation à la puissance $n > 0$ se réduit à l'identité, tous les S_n ont donc même parité que σ_1. Notre formule de récurrence peut donc dans ce cas là, s'écrire : $\boxed{S_n = \sigma_1S_{n-1}-\sigma_1(\sigma_1-k)\frac{S_{n-2}}{2}+\sigma_3S_{n-3}}$ où $\frac{S_{n-2}}{2}$ est entier. Cette formule de récurrence dans le cas où tous les S_n sont pairs, permet encore d'affirmer que si σ_1 divise S_{n-3}, alors σ_1 divise S_n.

Dans les deux cas, on peut donc conclure par récurrence, que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$(X+Y+Y) \mid \left(X^2+Y^2+Z^2\right) \quad \Longrightarrow \quad (X+Y+Y) \mid \left(X^{2+3k}+Y^{2+3k}+Z^{2+3k}\right)$$