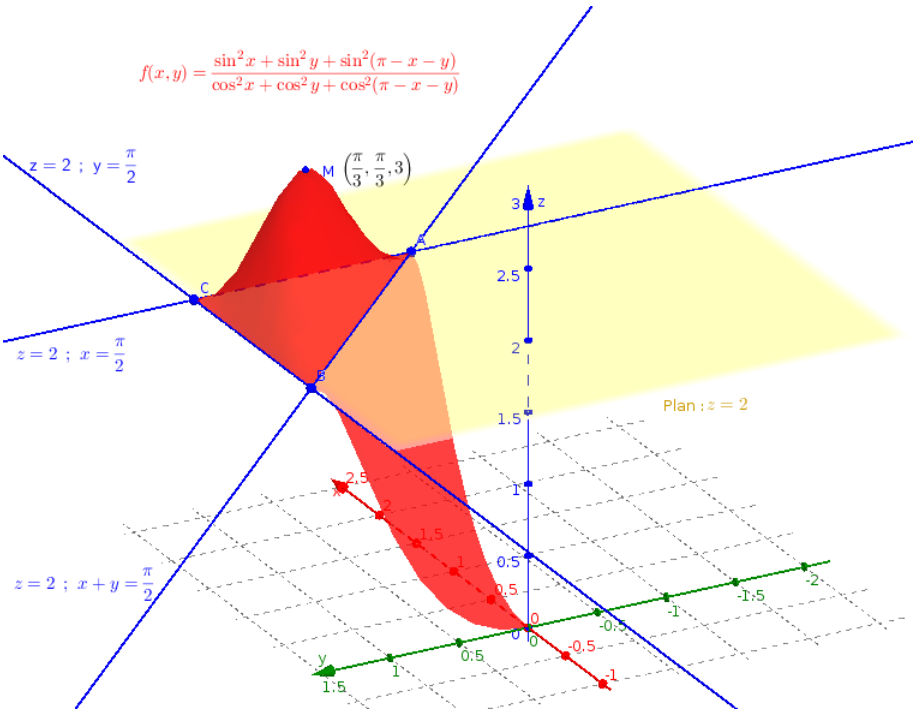
Énoncé du problème

Que peut-on dire d'un triangle dont les angles vérifient la relation suivante : $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=2$

illustration de l'ensemble des solutions :

représentation de $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2(\pi-x-y)}{\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2(\pi-x-y)}\end{array}$ et du plan d'équation $z=2$.



Solution 1 (niveau 1eS)

En se servant de l'identité $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ et tenant compte de $\gamma=\pi-\alpha-\beta$, d'où $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$, l'égalité de l'énoncé est équivalente successivement aux égalités suivantes :

$$3-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2(\alpha+\beta)=2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)\right)$$

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$$

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$$

$$2\cos\alpha\cos\beta\left(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right)=0$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$$

Notre égalité de départ caractérise donc un triangle rectangle, afin que l'un des trois angles α, β ou γ soit de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Solution 2 (Avec identités d'Euler, niveau Term. S)

En se servant des identités d'Euler : $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$; $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, l'égalité de l'énoncé est équivalente successivement aux égalités suivantes : $\dfrac{\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)^2+\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)^2+\left(e^{i\gamma}-e^{-i\gamma}\right)^2}{(2i)^2}=2\dfrac{\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)^2+\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)^2+\left(e^{i\gamma}+e^{-i\gamma}\right)^2}{2^2}$

$$0=2+e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}+e^{2i\beta}+e^{-2i\beta}+e^{2i\gamma}+e^{-2i\gamma}$$

En tenant compte de $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}=1$ on obtient : $0=2+e^{2i\alpha}+e^{2i\beta}e^{2i\gamma}+e^{2i\beta}+e^{2i\alpha}e^{2i\gamma}+e^{2i\gamma}+e^{2i\alpha}e^{2i\beta}=0$

$$0=\left(1+e^{2i\alpha}\right)\left(1+e^{2i\beta}\right)\left(1+e^{2i\gamma}\right)$$

Cela signifie que l'un de ces nombres complexes $e^{2i\alpha}$, $e^{2i\beta}$ ou $e^{2i\gamma}$ est égal à $-1=e^{i\pi}$, autrement dit le triangle doit être rectangle, pour avoir l'un de ses angles de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.