
Corrigé du sujet n° 15

Identité de Catalan(1814-1894)

Je commence par démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Je fais un raisonnement par récurrence.

- Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. L'identité proposée est donc vraie pour $n = 1$.
- Je suppose la formule vraie pour un certain rang n , et je dois montrer qu'elle reste vraie au rang $n + 1$:

Soit $n \geq 1$. Je suppose que $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

j'ai alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

- J'ai montré par récurrence que $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Ou bien

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

j'ai donc :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331} = \frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \dots + \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{666} + \frac{1}{1331} + \frac{1}{667} + \frac{1}{1330} + \dots + \frac{1}{1331} + \frac{1}{666} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1997}{666 \times 1331} + \frac{1997}{667 \times 1330} + \dots + \frac{1997}{1331 \times 666} \right) \\ &= 1997 \times \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Donc $a \times q = 1997 \times b \times p$, donc 1997 divise $a \times q$, or 1997 est un nombre premier qui ne divise pas q , car q est formé de produit d'entiers naturels strictement inférieurs à 1997, je peux donc conclure que a est divisible par 1997, d'après le théorème de Gauss.

Je me suis inspiré d'un exercice d'Olympiades internationales de mathématiques de 1979.