Corrigé du sujet n° 10

Première méthode

On note $\alpha_n = x^n + y^n + z^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère x, y, et z comme trois racines du polynôme suivant à coefficients entiers :
$P(X) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$ où

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y + z \\ \sigma_2 = xy + yz + xz \\ \sigma_3 = xyz \end{cases}$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha_1 \\ 2\sigma_2 = \alpha_1^2 - \alpha_2 \\ 3\sigma_3 = \alpha_3 - \sigma_1\alpha_2 + \sigma_2\alpha_1 \end{cases}$$

On obtient la dernière égalité en sommant les égalités $P(x) = 0$, $P(y) = 0$, $P(z) = 0$.
Les α_i étant des entiers, les σ_i le sont aussi.
La suite (α_n) vérifie la relation de récurrence suivante : (E) $\alpha_n = \sigma_1\alpha_{n-1} - \sigma_2\alpha_{n-2} + \sigma_3\alpha_{n-3}$.
Par hypothèse α_1 divise α_2, donc α_1 divise $\alpha_1^2 - \alpha_2$, donc α_1 divise $2\sigma_2$. On envisage deux cas :

1. α_1 est impair
   Comme α_1 divise $2\sigma_2$ et est premier avec 2, donc α_1 divise σ_2, d'après le théorème de Gauss. En raisonnant modulo α_1, on obtient :
   $\alpha_n \equiv \sigma_3\alpha_{n-3}\ (\alpha_1)$.

2. α_1 est pair
   Dans ce cas, ou bien l'un des x, y, z est pair, ou les trois sont pairs ; mais dans les deux cas, on a σ_3 est pair et la relation (E) montre que α_n est pair,pour $n \geqslant 4$ et on peut écrire $\alpha_n = \sigma_1\alpha_{n-1} - 2\sigma_2\frac{\alpha_{n-2}}{2} + \sigma_3\alpha_{n-3}$, et en raisonnant modulo α_1, on obtient :
   $\alpha_n \equiv \sigma_3\alpha_{n-3}\ (\alpha_1)$.

Dans les deux cas , on montre à l'aide d'une récurrence immédiate que $\alpha_n \equiv 0\ (\alpha_1)$, pour $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
On a bien montré qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x + y + z$ divise $x^n + y^n + z^n$.

Deuxième méthode

Raisonnons par l'absurde (si on veut éviter le raisonnement par récurrence).
Supposons qu'il existe un nombre fini de $n \in \mathbb{N}^*$ tels que α_1 divise α_n, appelons-les $\{n_1, n_2, ..., n_p\}$ et posons $q = \max\{n_1, n_2, ..., n_p\}$.
La relation (E) s'écrit alors $\alpha_{q+3} = \sigma_1\alpha_{q+2} - 2\sigma_2\frac{\alpha_{q+1}}{2} + \sigma_3\alpha_q$,et en raisonnant modulo α_1 comme précédemment, on obtient : $\alpha_{q+3} \equiv 0\ (\alpha_1)$, ce qui est absurde.