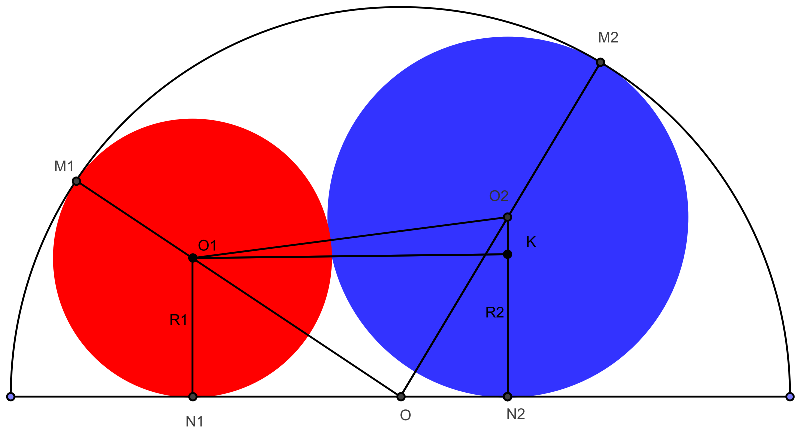
Corrigé du sujet n$^{\text{o}}$ 11

Pour répondre à la question posée, je commence par montrer deux résultats qui seront utilisés ultérieurement.

Premier résultat

Je dois démontrer que si je considère deux cercles de rayon R_1 et R_2 inscrits dans un demi-cercle de rayon 4, alors j'ai la relation suivante : $R_1+R_2 \leqslant 8(\sqrt{2}-1)$, comme l'indique la figure ci-dessous.



Je vais calculer de deux façons la longueur N_1N_2.
D'une part j'utilise le théorème de Pythagore dans le triangle O_1O_2K rectangle en K.
J'ai donc $O_1O_2^2 = O_1K^2 + KO_2^2$, d'où $N_1N_2 = O_1K = \sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_2-R_1)^2} = 2\sqrt{R_1R_2}$.
D'autre part j'utilise deux fois le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ON_1O_1 et ON_2O_2, j'obtiens : $N_1N_2 = N_1O + ON_2 = \sqrt{(4-R_1)^2-R_1^2} + \sqrt{(4-R_2)^2-R_2^2}$.
Soit $N_1N_2 = 2\sqrt{4-2R_1} + 2\sqrt{4-2R_2}$, d'où $\sqrt{R_1R_2} = \sqrt{4-2R_1} + \sqrt{4-2R_2}$.
En élevant au carré , j'ai donc $R_1R_2 = 8-2(R_1+R_2) + 2\sqrt{4-2R_1}\sqrt{4-2R_2}$ ou $2\sqrt{4-2R_1}\sqrt{4-2R_2} = R_1R_2 + 2(R_1+R_2) - 8$. En élevant au carré et en simplifiant, j'obtiens $R_1R_2 + 2(R_1+R_2) = 4\sqrt{2R_1R_2} \Leftrightarrow 2(R_1+R_2) = \sqrt{R_1R_2}(4\sqrt{2}-\sqrt{R_1R_2})$.
Or $\sqrt{R_1R_2} \leqslant \frac{R_1+R_2}{2}$, donc $2(R_1+R_2) \leqslant \frac{R_1+R_2}{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{R_1R_2})$, soit $\sqrt{R_1R_2} \leqslant 4(\sqrt{2}-1)$.
Une étude simple de la fonction $f(x) = \frac{x}{2}(4\sqrt{2}-x)$ définie sur $[0;4\sqrt{2}]$, montre que cette fonction admet un maximum en $x = 2\sqrt{2}$, mais $4(\sqrt{2}-1) \leqslant 2\sqrt{2}$
donc la fonction f admet un maximum en $x = 4(\sqrt{2}-1)$, d'où
$(R_1+R_2) \leqslant 2(\sqrt{2}-1)(4\sqrt{2}-4(\sqrt{2}-1)) = 8(\sqrt{2}-1) \qquad (1).$
Avec égalité quand $R_1 = R_2 = 4(\sqrt{2}-1)$.

Deuxième résultat

Je dois démontrer que les trois rayons des trois cercles inscrits vérifient la relation suivante :
$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} \qquad (2).$
Comme précédemment, j'obtiens $N_1N_3 = \sqrt{(R_1+R_3)^2-(R_1-R_3)^2} = 2\sqrt{R_1R_3}$,

$N_3N_2 = \sqrt{(R_2+R_3)^2-(R_2-R_3)^2} = 2\sqrt{R_2R_3}$ et puisque $N_1N_2 = 2\sqrt{R_1R_2}$, j'ai donc $\sqrt{R_1R_3}+\sqrt{R_2R_3} = \sqrt{R_1R_2}$, soit $\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$.
En utilisant les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique ,

j'obtiens : $\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{R_3}}} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}} \leqslant \sqrt{\sqrt{R_1R_2}} \leqslant \frac{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}}{2}$, d'où $4R_3 \leqslant (\frac{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}}{2})^2$, or $(\frac{\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}}{2})^2 = \frac{R_1+R_2+2\sqrt{R_1R_2}}{4} \leqslant 4(\sqrt{2}-1)$, donc $R_3 \leqslant \sqrt{2}-1$.

Si $R_1 = R_2$, alors la relation (2), nous permet d'écrire $\sqrt{R_1} = 2\sqrt{R_3}$, soit $R_1 = 4R_3$, et l'égalité dans la relation (1), nous donne $R_3 = \sqrt{2}-1$. Ce qui montre que $\sqrt{2}-1$ est la valeur maximale que peut prendre R_3.