Corrigé du sujet n° 8

On pose $v_i = \frac{2012}{u_i+2012}$, on a donc $v_i > 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$, d'où $1 - v_i = \displaystyle\sum_{j\neq i}^{n} v_j$.
En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{1-v_i}{n-1} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 ... + v_{i-1} + v_{i+1} .... + v_n}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i} v_j} \quad \text{(E)}$$

.
Par produit membre à membre , on obtient :

$$\prod_{i=1}^{n}(1-v_i) \geqslant (n-1)^n \prod_{i=1}^{n} v_i \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{1-v_i}{v_i} \geqslant (n-1)^n$$

Or, $\dfrac{1-v_i}{v_i} = \dfrac{u_i}{2012}$, donc $\dfrac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i}{2012^n} \geqslant (n-1)^n \Leftrightarrow \displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i \geqslant (n-1)^n 2012^n$ avec $m = (n-1)^n 2012^n$
On a égalité dans la relation (E) si et seulement si $v_1 = v_2 = ... = v_n$, c'est-à-dire
si et seulement si $v_i = \dfrac{1}{n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$,dans ce cas, on a $u_i = 2012(n-1)$.
On remarque que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i = (n-1)^n 2012^n$. C.Q.F.D.