Corrigé du sujet n$^{\text{o}}$ 9

On montre facilement par récurrence que $0 < x_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_{n+1}} &= \frac{1}{x_n - \dfrac{x_n^2}{2013}} \\ &= \frac{2013}{x_n(2013 - x_n)} \\ &= \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2013 - x_n}\end{aligned}$$

D'où $\dfrac{1}{x_{2013}} = \dfrac{1}{2013 - x_{2012}} + \dfrac{1}{2013 - x_{2011}} + ... + \dfrac{1}{2013 - x_0} + \dfrac{1}{x_0}$.
Or $\dfrac{1}{2013} < \dfrac{1}{2013 - x_n} < \dfrac{1}{2012}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $\dfrac{2013}{2013} + 1 < \dfrac{1}{x_{2013}} < \dfrac{2013}{2012} + 1$, soit $2 < \dfrac{1}{x_{2013}} < \dfrac{4025}{2012}$, ou $\dfrac{2012}{4025} < x_{2013} < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $0,49 < x_{2013} < 0,5$ CQFD.