Soient a, b et c angles d'un triangle quelconque.

Soit $P = \left(1 + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{b}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{c}{2}}\right)$

$$P = 1 + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{b}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{c}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{b}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{b}{2}}\frac{1}{\sin\frac{c}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{c}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{b}{2}}\frac{1}{\sin\frac{c}{2}}$$

Soit $k = \sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}}$

D' après l'inégalité Arithmetico géométrique (AMGM) :

1) $\frac{1}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{b}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{c}{2}} \geq 3k$
2) $\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{b}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{b}{2}}\frac{1}{\sin\frac{c}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{c}{2}} \geq 3k^2$
3) $\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\frac{1}{\sin\frac{b}{2}}\frac{1}{\sin\frac{c}{2}} = k^3$

Donc en injectant dans P:

$$P \geq 1 + 3k + 3k^2 + k^3 = (1+k)^3$$

De plus à nouveau d' après l' inégalité AMGM :

$k = \sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}}$ et $\sqrt[3]{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}} \leq \frac{\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}}{3}$

Donc $k \geq \frac{3}{\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}}$

Donc en injectant a nouveau :

$$P \geq (1 + \frac{3}{\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2}})^3$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2} \leq \frac{3}{2}$

La fonction Sin est concave sur $[0;\pi]$ et $a + b + c = \pi$

Donc $\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2} \leq 3\sin\frac{\frac{a+b+c}{2}}{3} = 3\sin\frac{a+b+c}{6} = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$

On a bien $P \geq (1 + \frac{3}{\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}})^3 \geq 27$

Avec le cas d'égalité où le triangle est équilatéral.