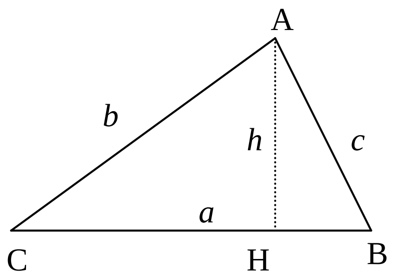
Solution

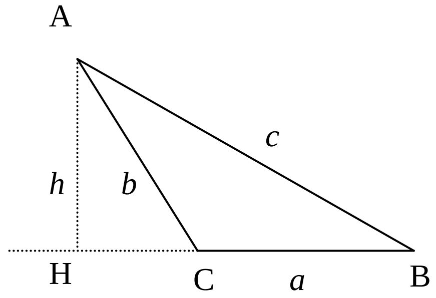
Lemme : Dans un triangle ABC à côtés rationnels, si on note H le pied de la hauteur issu de A, les longueurs HB et HC sont rationnelles.

Preuve du lemme

On note :

a = BC,
b = AC,
c = AB,
h = AH.



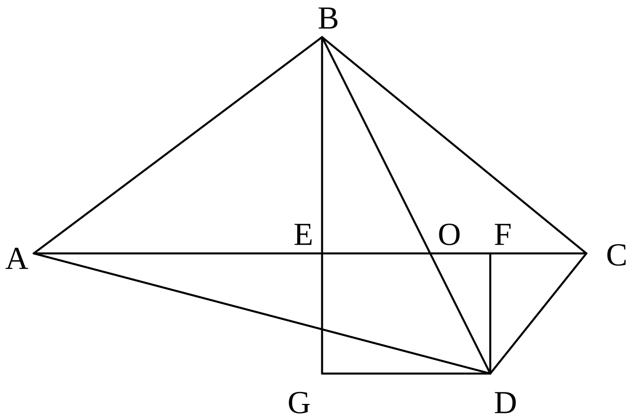


Les longueurs a, b et c sont supposées rationnelles.

- Si H appartient au côté [BC] (illustré par la figure de droite ci-dessus), on a a = HB + HC (1) mais aussi $c^2 = h^2 + \mathrm{HB}^2$ et $b^2 = h^2 + \mathrm{HC}^2$. Avec ces deux dernières égalités on tire $h^2 = c^2 - \mathrm{HB}^2 = b^2 - \mathrm{HC}^2$, ou encore $c^2 - b^2 = \mathrm{HB}^2 - \mathrm{HC}^2 = (\mathrm{HB} - \mathrm{HC})a$. D'où $\mathrm{HB} - \mathrm{HC} = (c^2 - b^2)/a$ (2).
On résout alors le système de deux équations (1) et (2) avec comme inconnues HB et HC et on trouve
$\mathrm{HB} = (a^2 - b^2 + c^2)/2a$ et $\mathrm{HC} = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$ qui sont bien deux quantité rationnelles.
- Si H n'appartient pas au côté [BC], on a soit a = HB – HC (qui correspond à la seconde illustration ci-dessus) soit a = HC – HB ; dans les deux cas on raisonne comme auparavant et la résolution des systèmes de deux équations d'inconnues HB et HC aboutit à des expressions de HB et HC qui sont encore rationnelles.

Preuve de la propriété

Soit maintenant un quadrilatère convexe ABCD dont les côtés et les diagonales sont rationnels. On note O le point d'intersection des diagonales, E le pied de la hauteur issue de B pour le triangle ABC, F le pied de la hauteur issue de D pour le triangle ADC. On suppose que les points E et F sont distincts.



On prolonge le segment [BE] au-delà de E pour placer le point G de sorte que EG = FD.
D'après le lemme précédent, en se plaçant dans les triangles ABC puis ADC, on peut dire que les longueurs AE et FC sont rationnelles ; on en déduit que EF est alors une longueur rationnelle. Le quadrilatère EFGD est un rectangle donc GD = EF, GD est donc aussi une longueur rationnelle. On se place dans le triangle BGD rectangle en G, en utilisant le théorème de Pythagore on peut dire que BG^2 a une valeur rationnelle. De la même façon dans le triangle ABE, il ressort que la longueur BE^2 a une valeur rationnelle et dans le triangle FDC on obtient que FD^2 a une valeur rationnelle. Comme FD = EG, la quantité EG^2 est elle aussi rationnelle.
On a $\mathrm{BG}^2 = (\mathrm{BE} + \mathrm{EG})^2 = \mathrm{BE}^2 + \mathrm{EG}^2 + 2\mathrm{BE}.\mathrm{EG}$, on peut en déduire d'après ce qui précède que BE.EG a une valeur rationnelle. Le rapport $\mathrm{BE}.\mathrm{EG}/\mathrm{BE}^2$ a donc une valeur rationnelle, et donc de même EG/BE après simplification. Par application du théorème de Thalès en configuration croisée (B-E-O-F-D) on a l'égalité des rapports : OD/OB = FD/BE mais comme FD = EG alors OD/OB = EG/BE et on a vu que ce dernier rapport a une valeur rationnelle. Par ailleurs la diagonale [BD] a une longueur rationnelle qui peut se décomposer en BD = BO + OD. OD et OB ont une somme rationnelle et sont dans un rapport rationnel, il vient donc que OD et OB ont eux-mêmes des valeurs rationnelles. Si E = F, la démonstration se simplifie et on aboutit à la même conclusion. On raisonne de même pour la diagonale [AC] et on obtient que AO et OC sont rationnels. Les quatre longueurs OA, OB OC et OD sont rationnelles.
La propriété est ainsi démontrée.